Darstellung von Ebenen

1. **Ebenengleichung in Parameterform:**
   Sei E eine Ebene. Dann lässt sich die Ebene darstellen durch eine Gleichung der Form
   $$x = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad (r, s \in \mathbb{R}).$$
   Der Vektor p heißt Stützvektor von E, weil $p = \overrightarrow{OP}$ die Ebene im Punkt P stützt. Des Weiteren sind die Vektoren u und v linear unabhängig und heißen Spannvektoren, weil sie die Ebene aufspannen.

2. **Koordinatengleichung einer Ebene:**
   Sei E eine Ebene. Dann lässt sich die Ebene darstellen durch
   $$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d,$$
   wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und mindestens einer der drei Koeffizienten a, b oder c ungleich 0 ist.

3. **Normalenform der Ebenengleichung:** Sei E eine Ebene und p ein Stützvektor von E. Die Ebene lässt sich beschreiben durch die Gleichung
   $$(x - p) \cdot n = 0.$$
   Hierbei ist n ein Normalenvektor, d.h. er ist orthogonal zu zwei gegebenen linear unabhängigen Spannvektoren von E.

Umrechnen zwischen Ebenengleichungen

Parameterform ⇒ Koordinatenform:
Alternative 1:
Stelle die Gleichung der Ebene in Parameterform als lineares Gleichungssystem dar, d.h.

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ x_2 &= p_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2 \\ x_3 &= p_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{aligned}$$

Anschließend forme das Gleichungssystem so um, dass in einer Gleichung die Parameter s und r wegfallen.
Die Gleichung ohne Parameter ist eine Koordinatengleichung der Ebene.

Beispiel: Sei

$$E : x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ erhält man } \begin{aligned} x_1 &= 5 + 1r + 0s \\ x_2 &= 2 + 0r - 5s \\ x_3 &= 3 + 2r + 8s \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 1r + 0s & & x_1 = 5 + 1r + 0s & & x_1 = 5 + 1r + 0s \\ x_2 &= 2 + 0r - 5s & \rightarrow \; & x_2 = 2 + 0r - 5s & \rightarrow \; & x_2 = 2 + 0r - 5s \\ x_3 &= 3 + 2r + 8s & & -2x_1 + x_3 = -7 + 0r + 8s & & \boxed{-10x_1 + 8x_2 + 5x_3 = -19} \end{aligned}$$

Somit ist $-10x_1 + 8x_2 + 5x_3 = -19$ eine Koordinatendarstellung der Ebene E.

Alternative 2:
Bestimme einen Vektor n, der auf beide Spannvektoren orthogonal steht, d.h. das folgende Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 &= 0 \\ v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieser Vektor liefert die Koeffizienten der Koordinatengleichung:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d.$$

Zur Berechnung von d setze für x_1, x_2 und x_3 die Werte des Stützvektors ein.

Beispiel: Sei

$$E : x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dann:

$$\begin{array}{c} 1 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 = 0 \\ 0 \cdot n_1 - 5 \cdot n_2 + 8 \cdot n_3 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} n_1 = -2 \cdot n_3 \\ n_2 = \frac{8}{5} \cdot n_3 \end{array}$$

Wähle $n_3 = 8$, dann folgt $n_1 = -16$ und $n_2 = 5$.
Also $-16x_1 + 5x_2 + 8x_2 = d$
Zur Bestimmung von d setze den Stützvektor ein:

$$d = -16 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = -80 + 10 + 9 = -61.$$

Somit ist die Koordinatengleichung: $-16x_1 + 5x_2 + 8x_2 = -61$

Parameterform $\Rightarrow$ Normalenform:
Bestimme einen Vektor n, der auf beide Spannvektoren orthogonal steht, d.h. das folgende Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 &= 0 \\ v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist die Normalenform gegeben durch:

$$(x - p) \cdot n = 0,$$

wobei p der Stützvektor aus der Parameterform ist.

Beispiel: Sei

$$E : x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dann:

$$\begin{array}{l} 4 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 = 0 \\ 4 \cdot n_1 - 5 \cdot n_2 + 8 \cdot n_3 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 4 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 = 0 \\ 0 \cdot n_1 + 12 \cdot n_2 - 7 \cdot n_3 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 4 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 = 0 \\ n_2 = \frac{7}{12} n_3 \end{array}$$

Wähle $n_3 = 12$, dann folgt $n_2 = 7$ und $4 \cdot n_1 - 5 \cdot 7 + 8 \cdot 12 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -\frac{61}{4} = -15,25$.
Somit ist die Normalenform:

$$\left(x - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -15,25 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform $\Rightarrow$ Parameterform:
Löse die Gleichung nach einer Variable (z.B. x_1) und ergänze die Gleichungen. Wir zeigen das am Beispiel für x_1. Sei $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, wobei $a \neq 0$. Dann:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d}{a} + \frac{-b}{a}x_2 + \frac{-c}{a}x_3 \\ x_2 &= 0 + 1x_2 + 0x_3 \\ x_3 &= 0 + 0x_2 + 1x_3 \end{aligned}$$

Dann ist die Parameterform gegeben durch:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{-b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{-c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

Analog kann man dies auch für x_2 und x_3 machen. Wichtig hierbei ist, dass der Koeffizient ungleich 0 ist.

Beispiel: Sei die Ebene E gegeben durch:

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 20.$$

Auflösen nach x_1 liefert: $x_1 = 20 - 5x_2 + 2x_3$.
Nun ergänze die Gleichung zu:

$$\begin{aligned} x_1 &= 20 - 5x_2 + 2x_3 \\ x_2 &= 0 + 1x_2 + 0x_3 \\ x_3 &= 0 + 0x_2 + 1x_3 \end{aligned}$$

Somit ist die Parameterform:

$$x = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

Koordinatenform $\Rightarrow$ Normalenform:
Die Koeffizienten der Koordinatengleichung sind die Koordinaten eines Normalenvektors n. Zur Bestimung eines Stützvektors ist es sinnvoll zwei Koordinaten der Koordinatengleichung 0 zu wählen.
Die fehlende Koordinate ergibt sich durch Einsetzen in die Koordinatengleichung.
Sei also beispielsweise $a \neq 0$ und setze $x_2 = x_3 = 0$. Dann ergibt sich:

$$ax_1 + 0x_2 + 0x_3 = d \Leftrightarrow x_1 = \frac{d}{a}$$

und somit die Normalenform:

$$\left(x - \begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel: Seien

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12.$$

Der Normalenvektor ist gegeben durch $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Setze $x_2 = x_3 = 0$. Dann gilt: $2x_1 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 12 \Leftrightarrow x_1 = 6$. Die Normalenform ist somit:

$$\left(x - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Normalenform $\Rightarrow$ Parameterform:
Der Stützvektor p kann aus der Normalenform übernommen werden. Zur Bestimmung der beiden Spannvektoren u und v muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} u \cdot n &= 0 \\ v \cdot n &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0 v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 = 0$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Vektoren u und v linear unabhängig sein müssen. Die Parameterform ist dann gegeben durch:

$$x = p + r \cdot u + s \cdot v \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

<u>Beispiel:</u> Sei die Ebene E gegeben durch:

$$\left(x - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

Der Stützvektor lässt sich ablesen und ist $p = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Zur Bestimmung der Spannvektoren löse folgendes Gleichungssystem[1]:

$$\begin{aligned} -10u_1 + 8u_2 + 5u_3 &= 0 \\ -10v_1 + 8v_2 + 5v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wähle $u_1 = 1$ und $u_2 = 5$, dann gilt: $-10 \cdot 1 + 8 \cdot 5 + 5u_3 = 0 \Leftrightarrow u_3 = -6$
und $v_1 = 1$ und $v_2 = 1$, dann gilt: $-10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 5u_3 = 0 \Leftrightarrow u_3 = \frac{2}{5}$.
Die Parameterform ist somit:

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \qquad (r, s \in \mathbb{R}).$$

[1]Das Gleichungssystem hat 2 Gleichungen und 6 Variablen, also existieren unendlich viele Lösungen und 2 Variablen lassen sich frei wählen. Hierbei ist zu beachten, dass die Spannvektoren linear unabhängig sind. Also sollte man die gewählen Koordinaten von v nicht als vielfaches von den Koordinaten von u wählen.

Normalenform $\Rightarrow$ Koordinatenform:
Zur Bestimmung der Parameterform muss einfach nur das Skalarprodukt in der Normalenform ausgerechnet werden, d.h.

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Also ist die Koordinatenform: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$

Beispiel: Sei

$$\left(x - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow -10x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 5 \cdot (-10) + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 = -50 + 16 + 15 = -19$
Also ist die Koordinatenform:

$$-10x_1 + 8x_2 + 5x_3 = -19$$