TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN **Fakultät Physik** Physikalisches Grundpraktikum	Versuch: **ES** Aktualisiert: am 03. 05. 2023

Erzwungene Schwingungen

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Pohlschen Rads.
2. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante δ in Abhängigkeit von der an der Wirbelstrombremse angelegten Stromstärke I. Ermitteln Sie durch graphische Auftragung den Wert von δ für $I = 0$.
3. Bestimmen Sie die Resonanzkurve einer ungedämpften und einer gedämpften Schwingung und bestimmen Sie durch Anpassung der theoretischen Resonanzkurve die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators sowie die Dämpfungskonstante. Vergleichen Sie die Werte mit denen aus Aufgabenstellung 1 und 2.

Ziel ist es, die charakteristischen Eigenschaften gedämpfter und erzwungener Schwingungen zu verstehen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Lineare, gedämpfte Schwingungen

Wirkt auf einen Körper eine Kraft, die proportional zu seiner Auslenkung aus der Ruhelage ist und entgegen der Auslenkung wirkt (rücktreibende Kraft), so schwingt der Körper harmonisch. Entsprechend gilt die folgende Newton-Gleichung:

$$F = m\ddot{x} = -Dx \tag{1}$$

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0. \tag{2}$$

Die Bewegung des Körpers wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$x(t) = a\,\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{3}$$

ω_0 ist die Kreisfrequenz des ungedämpften Oszillators. Bei der ungedämpften harmonischen Schwingung bleibt die Gesamtenergie des Systems erhalten und wandelt sich im Laufe der Schwingung ständig von potentieller in kinetische Energie um und umgekehrt. Reale Schwingungen unterliegen aber noch zusätzlichen Reibungskräften, die dem System Energie entziehen. Oft ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit und es gilt:

$$F \;=\; m\ddot{x} \;=\; -Dx \;-\; k\dot{x} \tag{4}$$

$$m\ddot{x} \;+\; k\dot{x} \;+\; Dx \;=\; 0 \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung kann mit dem Ansatz $x(t) \;=\; x_0\,e^{\lambda t}$ gelöst werden. Setzt man diesen in Gl. (5) ein erhält man

$$(m\lambda^2 + k\lambda + D)\,x_0\,e^{\lambda t} = 0 \tag{6}$$

Die Gleichung besitzt eine Lösung, wenn $m\lambda^2 + k\lambda + D \;=\; 0$. Man erhält damit 2 Lösungen für λ:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{k^2 - 4mD} \tag{7}$$

Zur Vereinfachung werden die Dämpfungskonstante $\delta = \frac{k}{2m}$ und die Kreisfrequenz des gedämpften Oszillators

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{8}$$

eingführt. Gl. (7) vereinfacht sich damit zu:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{9}$$

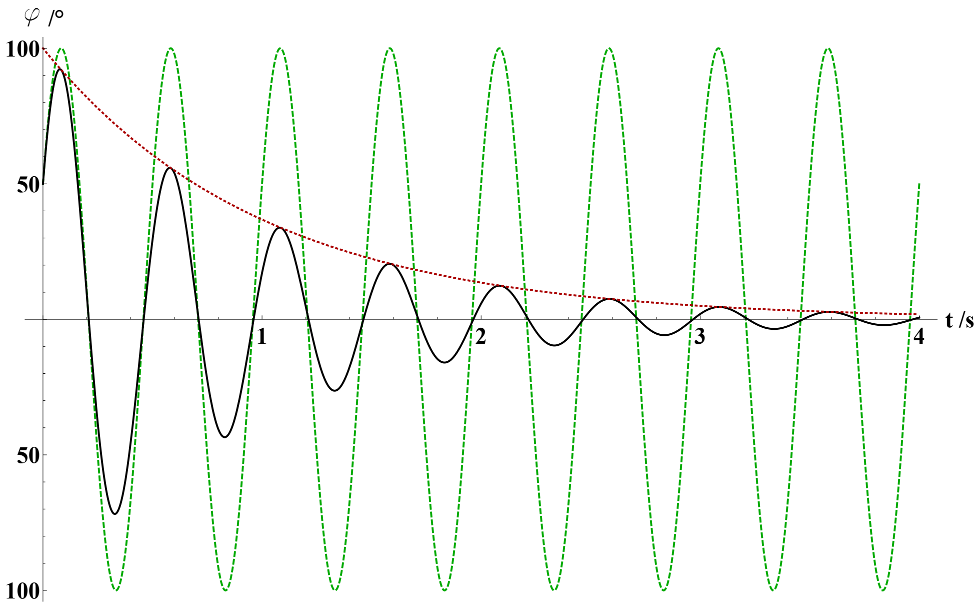

Abb. 1: Dargestellt wurden hier eine ungedämpfte Schwingung (grün), eine gedämpfte Schwingung mit $\delta = \frac{1}{s}$ (schwarz), sowie die Einhüllende (rot).

Abhängig von der Größe der Dämpfung ergeben sich insgesamt drei Fälle:

1. $\delta^2 < \omega_0^2$ - Gedämpfte Schwingung:
   Das Argument unter der Wurzel ist negativ und es ergibt sich $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$. Die momentane Auslenkung wird durch

   $$x(t) \;=\; x_1\, e^{-\delta t}\, e^{i\omega t} + \; x_2\, e^{-\delta t}\, e^{-i\omega t} = x_0 e^{-\delta t} \cos\left(\omega t + \phi\right). \tag{10}$$

   beschrieben. Als Lösung einer gewöhnlichen DGL 2. Ordnung müssen 2 freie und mittels Anfangsbedingungen zu bestimmende Parameter gegeben sein, die im obigen Fall entweder durch (x_1, x_2) oder (x_0, ϕ) zum Ausdruck kommen. Dass diese Funktion eine Schwingung beschreibt, wird anhand der periodisch aufeinanderfolgenden Nulldurchgänge sofort klar. Jedoch nimmt die Amplitude der Schwingung exponentiell ab (vgl. 1). Es gibt mindestens einen Nulldurchgang, bevor das Pendel zur Ruhe kommt. Die Lösung für diesen Fall ist in Abb. (1) dargestellt.

2. $\delta^2 = \omega_0^2$ - Aperiodischer Grenzfall:
   In diesem Spezialfall verschwindet der Term unter der Wurzel in Gl.(9), wodurch ein freier Parameter aufgelöst wird. Um nun wieder auf zwei freie Parameter zu kommen, wählt man einen

anderen Ansatz $x(t) = C(t)e^{-\delta t}$ und nach einer kurzen Rechnung erhält man die allgemeine Lösung:

$$x(t) \, = (c_1 + c_2 t) \, e^{-\delta t} \tag{11}$$

Das Pendel kehrt in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen schnellstmöglich die Ruhelage zurück.

3. $\delta^2 > \omega_0^2$ - Kriechfall:
Die Wurzel in Gl.(9) wird reell - damit gilt:

$$x(t) \, = \, x_1 \, e^{\lambda_1 t} \, + \, x_2 \, e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{12}$$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination von zwei reellen Exponentialfunktionen mit den Faktoren λ_1 und λ_2 in den Exponenten. Das System zeigt kein Schwingverhalten mehr und das Pendel kehrt sehr langsam, quasi kriechend, ohne Nulldurchgang in die Ruhelage zurück.

2.2 Gedämpfte Drehschwingungen

Translation		Rotation	
Ort	x	Winkel	φ
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \ddot{\varphi}$
Kraft	F	Drehmoment	$M = \lvert\vec{r} \times \vec{F}\rvert$
Leistung	$P = F \cdot v$	Leistung	$P = M \cdot \omega$

Tabelle 1: Vergleich der eindimensionalen Translation und Rotation.

Für die Beschreibung der momentanen Auslenkung verwenden wir den Drehwinkel φ als Funktion der Zeit. In Analogie zur Translationsbewegung ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit durch $\dot{\varphi}$ und die Winkelbeschleunigung durch $\ddot{\varphi}$ (Tab. 1). Als Ursache von Winkelbeschleunigungen gilt das Drehmoment M. Somit lautet in Analogie zur Translation die Bewegungsgleichung der Drehschwingung:

$$I\ddot{\varphi} \, + \, k_D\dot{\varphi} \, + \, D_D\varphi \, = \, 0 \tag{13}$$

Hierbei ist φ der Auslenkungswinkel, D_D Das Richtmoment, I das Massenträgheitsmoment bezogen auf die Drehachse und k_D die Reibungskonstante. In der Normalform lautet die DGL:

$$\ddot{\varphi} \, + \, 2\delta\dot{\varphi} \, + \, \omega_0^2\varphi \, = \, 0 \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{k_D}{2I} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{D_D}{I}. \tag{14}$$

Hierbei stellt δ die Dämpfungskonstante und ω_0 die Eigenfrequenz des *ungedämpften* Systems dar. Mithilfe eines Exponentialansatzes kann nun die Lösung der Bewegungsgleichung analog zu 2.1 ermittelt werden. Diese ergibt sich für die gedämpfte Schwingung im Schwingfall ($\delta^2 < \omega_0^2$) zu:

$$\varphi(t) \, = \, \varphi_0 \, e^{-\delta t} \cos{(\omega t \, + \, \theta)} \tag{15}$$

Dabei ist φ_0 die Maximalamplitude und θ eine Phasenverschiebung, welche durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Des Weiteren ist ω die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung, welche nicht mit ω_0, der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems, verwechselt werden darf. Zwischen diesen Größen besteht natürlich analog zu Gl. (8) der bekannte Zusammenhang:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{16}$$

Es bleibt zu erwähnen, dass die Kreisfrequenz für eine gegebene Dämpfung während des gesamten Schwingungsvorgangs konstant bleibt. Nur die Amplitude der Schwingung verringert sich mit zunehmender Schwingungsdauer (Abb. 2). Weiterhin kommt es durch die einhüllende Dämpfungsfunktion zu einer Verschiebung der Maxima und Minima bezüglich der ungedämpften Schwingung.

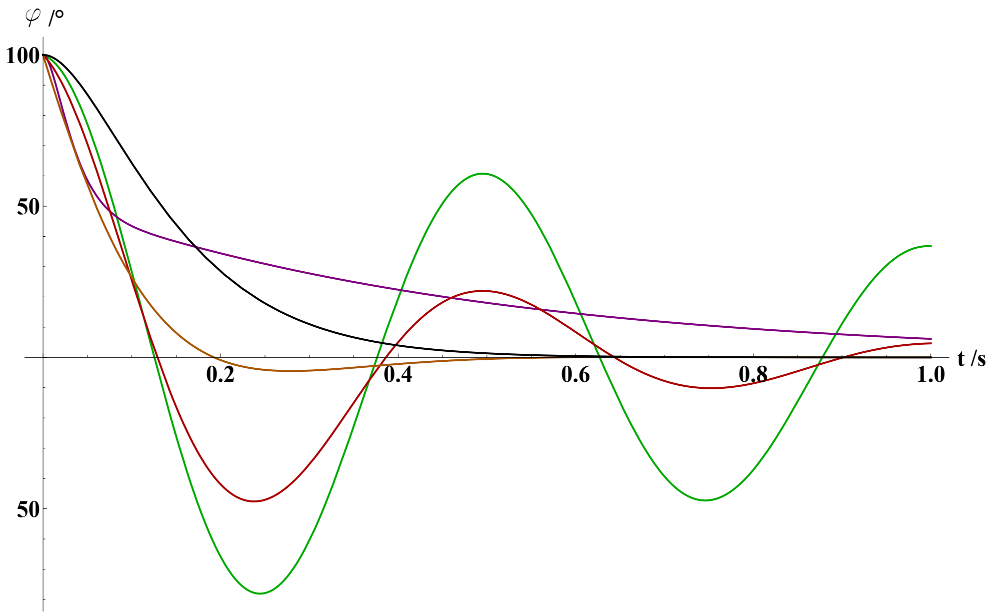

Abb. 2: Es wurden gedämpfte Schwingungen für fünf unterschiedliche Dämpfungskonstanten dargestellt. Grün: $\delta = \frac{1}{s}$, rot: $\delta = \frac{3}{s}$, orange: $\delta = \frac{9.7}{s}$, schwarz: $\delta = \frac{4\,\pi}{s} = \omega$, lila: $\delta = \frac{12\,\pi}{s}$.

2.3 Erzwungene Schwingungen

Man spricht von einer erzwungenen Schwingung, wenn einem Oszillator durch eine äußere Erregung eine Schwingung aufgezwungen wird. Somit folgt der Oszillator nach einer gewissen Einschwingzeit nicht mehr seinem Eigenschwingverhalten, sondern schwingt in der Erreqerfrequenz. Der Erreger übt während der Schwingung auf das System ein zeitabhängiges Drehmoment aus, welches durch einen inhomogenen, zeitabhängigen Term in der Differentialgleichung (Gl. 13) ausgedrückt wird. Für den Fall einer äußeren harmonischen Anregung ergibt sich:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = A_E\, e^{i\omega_E t}. \tag{17}$$

Die Lösung einer solchen, inhomogenen Differentialgleichung lässt sich durch die Superposition der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden.

Lösung der inhomogenen DGL: Betrachtet man das Schwingverhalten *nach* dem Einschwingvorgang (Eigenschwingungen sind abgeklungen), so erscheint der folgende Ansatz sinnvoll:

$$\varphi(t) = Ae^{i(\omega_E t - \theta)} \tag{18}$$

Der Lösungsansatz beinhaltet zwei freie Parameter: Die Amplitude A der erzwungenen Schwingung und die Phasenverschiebung θ gegenüber der äußeren Erregung. Einsetzen dieses Ansatzes in die Bewegungsgleichung (17) liefert:

$$(\omega_0^2 - \omega_E^2) + 2i\delta\omega_E = \frac{A_E}{A}\, e^{i\theta} \tag{19}$$

Daraus ergeben sich für Real- und Imaginärteil jeweils eine Gleichung:

$$\text{Realteil:} \quad \omega_0^2 - \omega_E^2 = \tfrac{A_E}{A} \cos\theta \tag{20}$$

$$\text{Imaginärteil:} \quad 2\delta\omega_E = \tfrac{A_E}{A} \sin\theta \tag{21}$$

woraus die folgenden Bestimmungsgleichungen für Amplitude A und Phase θ abgeleitet werden können:

$$A(\omega_E) = \frac{A_E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}} \tag{22}$$

$$\theta(\omega_E) = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}\right). \tag{23}$$

Somit wird erkennbar, dass die Amplitude der erzwungenen Schwingung von folgenden Größen abhängt:

- Amplitude A_E der äußeren Erregung
- Dämpfung δ des Systems
- Eigenfrequenz ω_0 und Erregerfrequenz ω_E

Interessanterweise bleibt die Phase von der Erregeramplitude unabhängig.

2.4 Die Resonanzkurve

Aus Gl. (22) kann man durch Ableiten die Lage des Maximums der Resonanzkurve bestimmen. Das Maximum nimmt mit zunehmender Dämpfung δ ab und verschiebt sich hin zu kleineren Frequenzen.

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{24}$$

2.5 Phasenverschiebung

Die Phasendifferenz $\theta(\omega_E)$ zwischen Erreger und System ist von der Erregerfrequenz ω_E abhängig und springt im ungedämpften Fall bei $\omega_E = \omega_0$ von 0 auf π. Bei Dämpfung erfolgt dieser Übergang kontinuierlich, wobei die Phasenverschiebung bei $\omega_E = \omega_0$ den Wert $\theta = \pi/2$ erreicht. Der Verlauf der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von ω ähnelt für starke Dämpfungen dem einer Geraden.

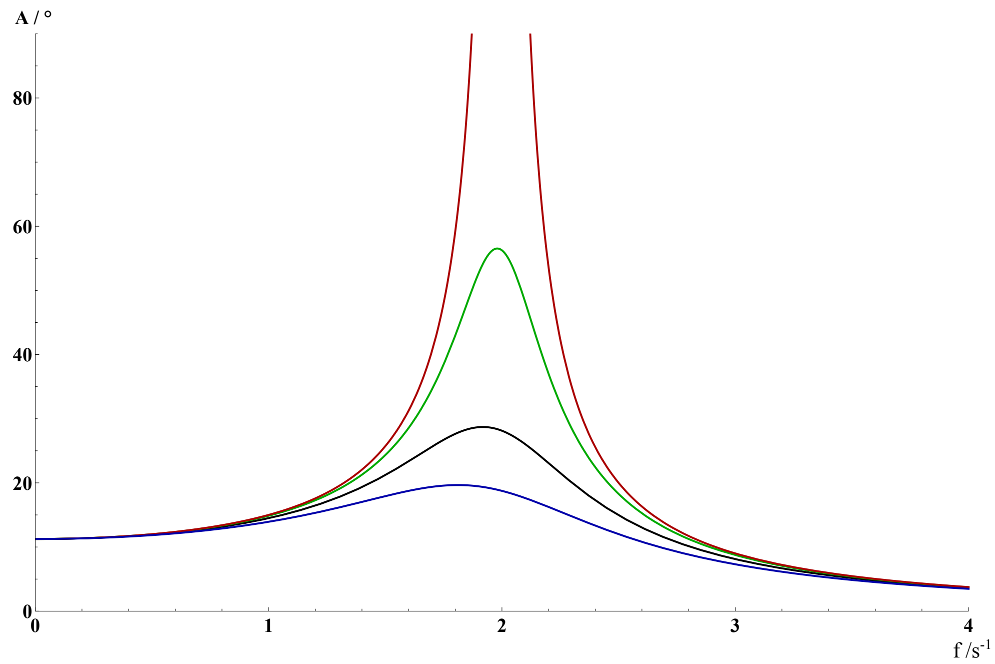

Abb. 3: Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen. Die Erregeramplitude wurde zu $A_E = 45\frac{\circ}{s^2}$ festgelegt. Man kann leicht die sog. Resonanzkatastrophe erkennen. Es gilt $\delta_{\text{rot}} = 0 < \delta_{\text{grün}} < \delta_{\text{schwarz}} < \delta_{\text{blau}}$

2.6 Wirbelstrombremse

Eine Wirbelstrombremse besteht aus einer Spule, welche bei angelegtem Strom I über das Magnetfeld $B \sim I$ ein bremsendes Drehmoment auf das Pendel ausübt. Die induzierte Spannung im Drehpendel lässt sich mithilfe des Faradayschen Induktionsgesetzes zu $U_{\text{ind}} \sim B \cdot v$ berechnen. Das dämpfende Drehmoment der Wirbelstrombremse kann damit folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$P_{\text{Brems}} \sim U_{\text{ind}}^2 \sim B^2 \cdot v^2 \sim I^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \tag{25}$$

$$M = \frac{P_{\text{Brems}}}{\dot{\varphi}} \sim I^2 \cdot \dot{\varphi} \tag{26}$$

Daher ist eine I^2-Abhängigkeit der Dämpfungskonstanten δ zu erwarten.

3 Aufbau und Durchführung

Der Versuch wird mithilfe des Pohlschen Rads durchgeführt (Abb. 4). Dieses besteht aus einem drehbar gelagerten Kupferrad, welches durch eine Spiralfeder in Ruhelage gehalten wird. Zusätzlich kann das Drehpendel durch einen Motor angeregt werden. Mithilfe einer Wirbelstrombremse können weiterhin verschiedene Dämpfungen eingestellt werden.

3.1 Messung der Eigenfrequenz

Bestimmen Sie zunächst die Eigenfrequenz ω_0 des Drehpendels mithilfe der Stoppuhr. Lenken Sie dazu das Drehpendel maximal aus und stoppen Sie die Zeit von mindestens fünf Schwingungen.

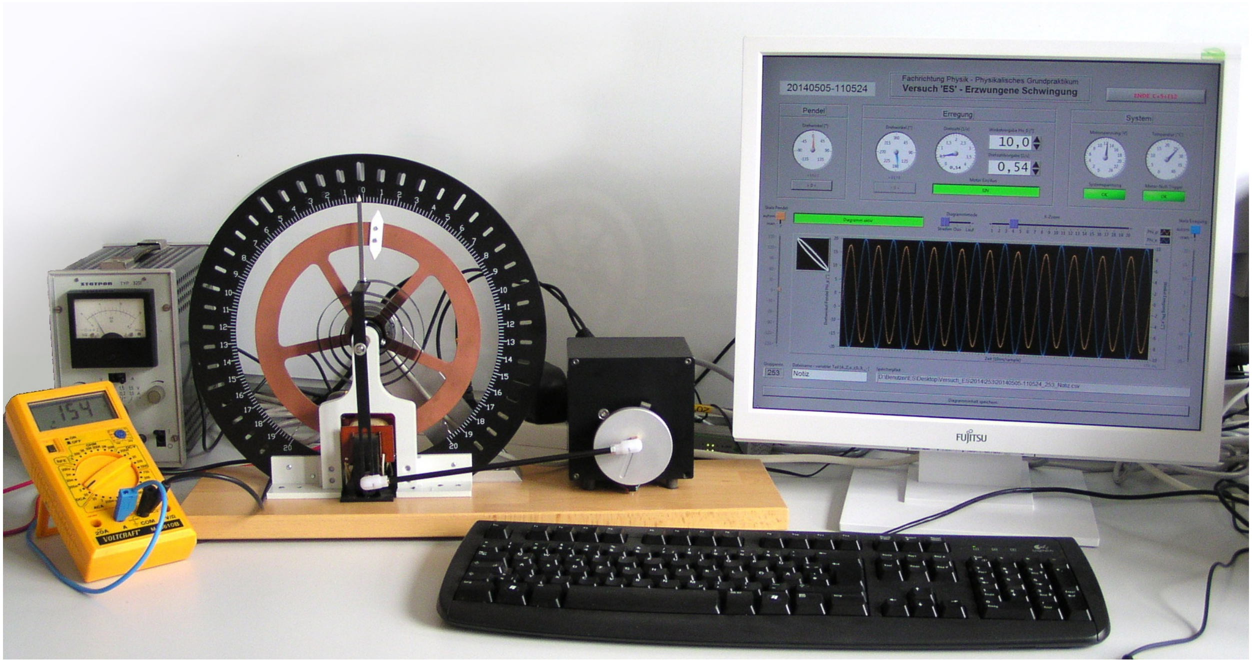

Abb. 4: Versuchsaufbau: In der Mitte ist das kupferfarbene Pohlsche Rad erkennbar. Dieses wird mithilfe eines gekoppelten Schrittmotors zu Schwingungen angeregt. Der Zeitverlauf der momentanen Auslenkung wird mittels PC erfasst und kann mit dem der Erregung verglichen werden.

Wiederholen Sie dies mindestens fünf mal und berechnen Sie hieraus die Eigenfrequenz im ungedämpften Zustand. Zeichnen Sie nun den Schwingungsvorgang mithilfe des PCs auf. Bestimmen Sie die Frequenz durch den Fit einer geeigneten Funktion an die aufgenommene Kurve und vergleichen sie die Ergebnisse.

3.2 Messung der Dämpfungskonstante

Aus den Amplituden zweier benachbarter Maxima einer gedämpften Schwingung lässt sich mittels logarithmischen Dekrements die Dämpfungskonstante δ bestimmen. Aus Gl. (15) ergibt sich:

$$\frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_0 + T)} = \frac{e^{-\delta\, t_0}}{e^{-\delta(t_0 + T)}} = e^{\delta\, T} \tag{27}$$

Nimmt man zusätzlich an, dass sich die Eigenfrequenz des Pohlschen Rads nur wenig durch die zusätzliche Dämpfung ändert, ist die Annahme $T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ gerechtfertigt. Stellen Sie die Stromstärke der Wirbelstrombremse nun auf 200mA ein und zeichnen Sie mithilfe des PCs eine gedämpfte Schwingung auf. Bestimmen Sie die Amplituden von mehreren aufeinanderfolgenden Maxima. Ermitteln Sie in gleicher Art die Dämpfungskonstanten für 400mA und 600mA. Tragen Sie die ermittelten Dämpfungskonstanten gegen I^2 graphisch auf. Sind die von Ihnen berechneten Dämpfungskonstanten mit einer I^2 Abhängigkeit vereinbar? (Vgl. hierzu 2.6) Welche Dämpfungskonstante ergibt sich für $I = 0$? Welche würden Sie für ein ideales Drehpendel erwarten?

3.3 Aufnahme von Resonanzkurven

Vergewissern Sie sich zunächst, dass die Wirbelstrombremse ausgeschalten ist und sich das Pendel in Ruhelage befindet. Geben Sie eine geeignete Motordrehzahl zwischen 0 und $2\,s^{-1}$ ein. Lassen Sie das Pendel einschwingen und nehmen dann die Bewegung des Pendels für ca. 30 Sekunden auf. Lesen Sie anschließend die Amplitude der Schwingung ab.

Wiederholen Sie die gesamte Messung für verschiedene Motoreinstellungen im Bereich von 0 - 2 s^{-1}, sodass Sie insgesamt ca. 15 Messpunkte erhalten. Es ist sinnvoll, dabei die Resonanzfrequenz genauer abzutasten. Wiederholen Sie die Aufgabe für eine Stromstärke von 400mA an der Wirbelstrombremse. Zeichnen Sie die beiden Resonanzkurven in einen Graphen. Vergleichen Sie diese im Anschluss. Lassen sich die theoretischen Vorhersagen für die Änderung der Kurvenform von $\delta \approx 0$ zu $\delta > 0$ erkennen? Diskutieren sie diese.

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von M. Kauer und B. Scholz erstellt. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

4 Fragen zur Vorbereitung

- Wie lautet der Zusammenhang zwischen Frequenz und Kreisfrequenz?
- Was ist ein Drehpendel?
- Welche Gleichung beschreibt eine Schwingung mit <u>schwacher</u> Dämpfung?
- Welche drei Fälle unterscheidet man je nach Stärke der Dämpfung?
- Skizzieren Sie die zugehörigen Amplitudenverläufe in Abhängigkeit von der Zeit.
- Erklären Sie die Funktionsweise der Wirbelstrombremse.
- Zeichnen Sie eine Resonanzkurve einer erzwungenen Schwingung. Achsenbeschriftung! Was ist hierbei ω?
- Wie verändert sich die Resonanzkurve, wenn die Dämpfung erhöht wird? (Maximalamplitude und Lage des Maximums!)
- Ein System besitzt die Eigenfrequenz ω_0. Mit welcher Frequenz schwingt es, wenn eine Dämpfung der Größe $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$ angelegt wird?

Literatur

[1] Praktikum der Physik, Wilhelm Walcher, Teubner Verlag

[2] Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme, Wolfgang Demtröder, Springer Verlag

[3] Grundkurs der Physik 1: Mechanik - Wärmelehre, Hildegard Hammer, Oldenbourg-Verlag