3

Relationen und Funktionen

Die in diesem Kapitel zu besprechenden Konzepte der Relation und der Funktion erlauben es, bestimmte *strukturelle Eigenschaften* eines Bereichs formal zu erfassen. Während Relationen allgemeine Beziehungen zwischen Elementen beschreiben, sind Funktionen Zuordnungen, die jedem Element einer Menge A genau ein Element einer Menge B zuweisen. Um diese Begriffe zu präzisieren, führen wir im ersten Abschnitt ausgehend vom Mengenbegriff zunächst den Begriff des geordneten Paars zweier Elemente und den Begriff des kartesischen Produkts von Mengen ein. Allgemeiner werden n-Tupel und Wörter über einer gegebenen Menge charakterisiert. Aufbauend auf dem Begriff des kartesischen Produkts werden dann in Abschnitt 3.2 zunächst Relationen formal definiert und in 3.3 Operationen auf Relationen betrachtet. Im Anschluß stellen wir in Abschnitt 3.4 den Funktionsbegriff dar und gehen in 3.5 auf wichtige Eigenschaften von Funktionen ein. Das Kapitel schließt mit einer Darstellung des wichtigen Prinzips der induktiven Definition von Mengen und mit Bemerkungen zu charakteristischen Funktionen, höheren Funktionen und unendlichen kartesischen Produkten.

3.1 Tupel, kartesische Produkte und Wörter

Der naive Begriff einer „Zuordnung“ beinhaltet eine Reihenfolge oder Richtung, anders als der Mengenbegriff. Kartesische Produkte, die wir nun besprechen werden, erlauben es, eine Reihenfolge zwischen Elementen festzuhalten. Um kartesische Produkte zu definieren, benötigt man den Begriff des „geordneten Paars" $\langle a, b\rangle$ zweier Elemente. Wir könnten das geordnete Paar als primitiven Begriff einführen. Es ist jedoch auch eine Rückführung auf schon vorhandene Begriffe möglich. Wer sich nicht für Feinheiten einer mengentheoretischen Kodierung interessiert, kann die nachfolgende Definition nebst zugehörigem Lemma ohne Schaden überlesen. Schreibweisen wie $\{a, b\}$ sollen dort nicht implizieren, daß die Elemente a und b notwendigerweise verschieden sind. Im Fall $a = b$ folgt natürlich $\{a, b\} = \{a\} = \{b\}$ sowie $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$.

Definition 3.1 Seien a und b Elemente einer Menge M. Das *geordnete Paar* von a und b, notiert $\langle a, b\rangle$, ist die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Lemma 3.2 *Für beliebige Elemente a, b, c und d einer Menge M gilt:*

(*i*) *Falls $\{a, c\} = \{b, c\}$, so gilt $a = b$.*

(*ii*) *Falls $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$, so gilt $a = c$ und $b = d$, und umgekehrt.*

Beweis. (i) Es gelte $\{a, c\} = \{b, c\}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Falls $a = c$ gilt, so folgt $b \in \{b, c\} = \{a, c\} = \{a\}$, also $a = b$. Falls $a \neq c$ gilt, so folgt aus $a \in \{a, c\} = \{b, c\}$ ebenfalls $a = b$.

(ii) Es gelte $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$. Aus $\{a\} \in \langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ folgt $\{a\} = \{c\}$ oder $\{a\} = \{c, d\}$. Im ersten Fall folgt $a = c$, im zweiten sogar $a = c = d$. Stets erhalten wir $\{a\} = \{c\}$ und $a = c$. Nach Voraussetzung gilt $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Aufgrund dieser Gleichung folgt wegen $\{a\} = \{c\}$ nach Teil (i) nun $\{a, b\} = \{c, d\}$, hieraus durch nochmalige Anwendung von (i) aber $b = d$. Bei der Umkehrung ist nichts zu zeigen. ■

Wegen Lemma 3.2 (ii) können wir vom vorderen Eintrag a und vom hinteren Eintrag b des geordneten Paars $\langle a, b\rangle$ sprechen. Beide Einträge können identisch sein. Derselbe Effekt ließe sich allerdings auch durch viele Varianten von Definition 3.1 erreichen.

Definition 3.3 Seien A und B Mengen. Die Menge

$$A \times B := \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

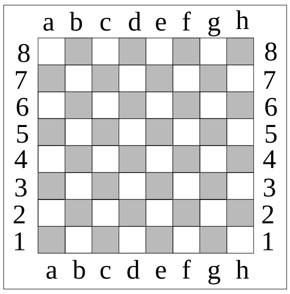
heißt *kartesisches Produkt* der Mengen A und B.

Beispiele 3.4 Zur Verdeutlichung dieses Begriffs hier einige Beispiele.

1. Es sei sei $A = \{1,2\}$, und $B = \{k,l,m\}$. Dann ist $A \times B = \{\langle 1,k\rangle, \langle 1,l\rangle, \langle 1,m\rangle, \langle 2,k\rangle, \langle 2,l\rangle, \langle 2,m\rangle\}$.

2. Es sei $A = \{0,1\}$. Dann ist $A \times A = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$. Die Wahrheitswert-Tabelle aus dem Beweis von Satz 1.1 unterscheidet also je einen Fall für jedes Element von $\{0,1\} \times \{0,1\}$.

3. Die übliche Schreibkonvention für Schachfelder basiert darauf, daß das Schachbrett

   als kartesisches Produkt der Mengen $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ und $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ betrachtet wird. Felderbezeichnungen wie „$f5$“ stellen nur eine Kurznotation für das entsprechende geordnete Paar $\langle f,5\rangle$ dar.

Sind A und B endlich, mit m respektive n Elementen, so hat des kartesische Produkt $A \times B$ gerade $m \cdot n$ viele Elemente. Dies folgt sofort aus Teil (ii) von Lemma 3.2. Die zweite der nun folgenden Identitäten ergibt eine weitere formale Ähnlichkeit zum Rechnen mit Zahlen. Man beachte, daß dort das erste Argument A festgehalten wird.

Lemma 3.5 *Die folgenden Identitäten gelten für beliebige Mengen:*

$$\begin{array}{rrcl} (i) & (A \times B) \cap (C \times D) & = & (A \cap C) \times (B \cap D), \\ (ii) & (A \times B) \cup (A \times C) & = & A \times (B \cup C). \end{array}$$

Beweis. (i) Da wir hier die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen haben, folgen wir dem Standardrezept aus Bemerkung 2.3. Wir zeigen, daß jedes Element der linken Seite auch ein Element der rechten Seite ist. Die Umkehrung folgt analog. Sei $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Nach Definition des Durchschnitts gilt dann

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad x \in A \times B, \\
&(2) \quad x \in C \times D.
\end{aligned}
$$

Nach der Definition des kartesischen Produkts (Def. 3.3) folgt aus (1) und (2) nun

$$
\begin{aligned}
&(3) \quad \text{es existieren } a \in A, b \in B\text{: } x = \langle a, b\rangle, \\
&(4) \quad \text{es existieren } c \in C, d \in D\text{: } x = \langle c, d\rangle.
\end{aligned}
$$

Da somit $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ gilt, folgt mit Lemma 3.2 (ii) nun $a = c$ und $b = d$. Somit ist $a = c \in A \cap C$ und $b = d \in B \cap D$, das heißt $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(ii) Wir zeigen zuerst $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$. Sei d ein beliebiges Element von $(A \times B) \cup (A \times C)$. Nach Definition der Vereinigung ist dann $d \in A \times B$ oder $d \in A \times C$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1, $d \in A \times B$. Nach Definition 3.3 existieren dann Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit $d = \langle a, b\rangle$. Damit existieren Elemente $a \in A$ und $b \in B \cup C$ mit $d = \langle a, b\rangle$. Nach Definition 3.3 gilt dann $d \in A \times (B \cup C)$.

Fall 2, $d \in A \times C$. Nach Definition 3.3 existieren dann Elemente $a \in A$ und $c \in C$ mit $d = \langle a, c\rangle$. Damit existieren Elemente $a \in A$ und $c \in B \cup C$ mit $d = \langle a, c\rangle$. Nach Definition 3.3 gilt dann $d \in A \times (B \cup C)$.

In beiden Fällen folgt also $d \in A \times (B \cup C)$, wodurch $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$ bewiesen ist.

Wir zeigen nun umgekehrt, daß $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ gilt. Es sei d ein beliebiges Element von $A \times (B \cup C)$. Nach Definition 3.3 existieren dann Elemente $a \in A, e \in B \cup C$ mit $d = \langle a, e\rangle$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1, $e \in B$. Nach Definition 3.3 ist dann $d = \langle a, e\rangle \in A \times B$. Damit ist auch $d \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Fall 2, $e \in C$. Nach Definition 3.3 ist dann $d = \langle a, e\rangle \in A \times C$. Damit ist auch $d \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

In beiden Fällen ergibt sich $d \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Damit ist $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ bewiesen. Da wir bereits $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$

gezeigt haben, folgt $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$ nach Lemma 2.6 Teil 2.

Wenn man etwas Vertrautheit beim Umgang mit dem Existenzquantor voraussetzt, kann man die Argumentation wesentlich kompakter darstellen:

$$\begin{aligned}
& d \in A \times (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & \exists a \in A, \exists e \in B \cup C\colon d = \langle a, e \rangle \\
\Leftrightarrow\ & \exists a \in A, \exists e\colon ((e \in B \vee e \in C) \wedge d = \langle a, e \rangle) \\
\Leftrightarrow\ & \exists a \in A, \exists e\colon ((e \in B \wedge d = \langle a, e \rangle) \vee (e \in C \wedge d = \langle a, e \rangle)) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists a \in A, \exists e \in B\colon d = \langle a, e \rangle)\ \vee\ (\exists a \in A, \exists e \in C\colon d = \langle a, e \rangle) \\
\Leftrightarrow\ & (d \in A \times B) \vee (d \in A \times C) \\
\Leftrightarrow\ & d \in (A \times B) \cup (A \times C).
\end{aligned}$$

■

Hinweis 3.6 Wir haben in Teil (i) des vorangegangenen Beweises eine „Vorsichtsmaßnahme“ verwendet, die sich generell empfiehlt, um Fehlschlüsse zu vermeiden: als wir in den Zeilen (3) und (4) die beiden Informationen $x \in A \times B$ und $x \in C \times D$ aufschlüsselten, hatten wir bewußt *vier* Variablen a, b, c, d verwendet. Aus Definition 3.3 alleine folgen keineswegs die Identitäten $a = c$ und $b = d$, wir mußten wirklich erst Lemma 3.2 (ii) verwenden. Ganz generell sollte man *besser diesselbe Variable nur dann zweimal verwenden, wenn sicher ist, daß damit stets dasselbe Objekt bezeichnet wird.*

Wir wollen nun noch kartesische Produkte mit n Faktoren definieren, wobei $n \geq 0$ eine beliebige natürliche Zahl ist. Hierzu führen wir das Symbol „$\langle\ \rangle$“ ein, das nachfolgend das *leere Tupel* repräsentiert (wir verzichten auf eine Kodierung als Menge). Weiter betrachten wir die Elemente einer Menge A als Eintupel, die wir wahlweise in der Form a oder $\langle a \rangle$ schreiben. Für beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_{n+1}$ mit $n \geq 2$ definieren wir nun induktiv

$$\langle a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \rangle := \langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle, a_{n+1} \rangle$$

als das $n + 1$-*Tupel* mit den Elementen $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$.

Die hier verwendete Technik der induktiven Definition beruht auf demselben „Leiterprinzip“, das wir bereits im Zusammenhang mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion im vorigen Kapitel kennengelernt hatten. Wenn wir wissen, wie geordnete Tupel der Stelligkeit 0, 1 oder 2 definiert sind, und wenn wir angeben, wie sich die Definition des geordneten $(n+1)$-Tupels für $n \geq 2$ auf die des geordneten n-Tupels zurückführen läßt, so haben wir tatsächlich Tupel beliebiger (endlicher) Stelligkeit definiert. Am Ende des Kapitels werden wir ausführlicher auf die eng verwandte induktive Definition von Mengen eingehen.

Definition 3.7 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Die Menge

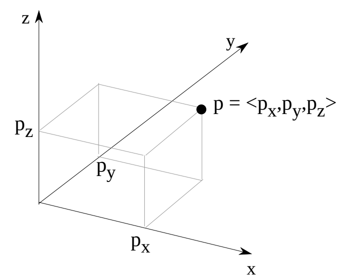
$$\prod_{i=1}^{n} A_i := \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

heißt *kartesisches Produkt* der Mengen $A_1, ..., A_n$.

Das kartesische Produkt wird oft auch in der Form $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ notiert. Gilt $A_1 = \ldots = A_n =: A$, so schreibt man für $\prod_{i=1}^{n} A_i$ auch kürzer A^n.

Beispiele 3.8 Auch hierzu einige Beispiele.

1. Stets gilt $A^0 = \{\langle\ \rangle\}$ und $A^1 = \{\langle a \rangle \mid a \in A\} = \{a \mid a \in A\} = A$.
2. Es sei sei $A = \{1, 2\}$, $B = \{b\}$ und $C = \{c\}$. Dann ist $A \times B \times C = \{\langle 1, b, c \rangle, \langle 2, b, c \rangle\}$.
3. Bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, so ist $\mathbb{R}^3$ der dreidimensionale euklidische Raum. Jedes Element $p = \langle p_x, p_y, p_z \rangle \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet also einen Punkt im Raum, die drei Komponenten geben die Koordinaten bezüglich des üblichen Koordinatensystems mit den Achsen x, y, z wieder.



Die folgende Definition motiviert, warum wir auch geordnete 1-Tupel und das leere Tupel $\langle\ \rangle$ als Spezialfälle geordneter Tupel eingeführt haben.

Definition 3.9 Es sei A eine Menge. Dann heißt

$$A^* := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A^n$$

die Menge der *Wörter über der Menge A*. Jedes Element $w \in A^n$ heißt ein *Wort der Länge n* über A.

Man sollte sich nicht dadurch verwirren lassen, daß wir an dieser Stelle zwei unterschiedliche Bezeichnungen für dieselbe Art von Objekt verwenden: formal sind Wörter der Länge n schlicht n-Tupel mit Elementen aus A. Von Wörtern spricht man in der Regel dann, wenn man Tupel unterschiedlicher Länge betrachtet, und wenn man betonen möchte, daß man die Tupel einfach als Zeichenfolgen auffassen möchte. Die Basismenge A wird in diesem Kontext meist als das „Alphabet" bezeichnet. Wörter über dem Alphabet A werden häufig in der vereinfachten Form $a_1 \cdots a_n$ statt $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ notiert. Man sagt deshalb auch, ein Wort über A sei eine *endliche Folge* von Symbolen aus A.

Beispiel 3.10 Es sei A das Alphabet mit allen Buchstaben der deutschen Sprache. Dann sind

$$\mathit{Montag}, \mathit{Dienstag}, \ldots, \mathit{Sonntag}$$

Wörter über A. Es ist *Montag* eine notationelle Variante für $\langle M, o, n, t, a, g \rangle$ und analog für die anderen Wörter.

Definition 3.11 Es sei A eine Menge. Dann heißt jede Teilmenge L von A^* eine *formale Sprache* über dem Alphabet A. Mit $\mathcal{L}(A)$ bezeichnen wir die Menge aller formalen Sprachen über A.

Solange keine Konfusion zu befürchten ist, werden wir formale Sprachen auch einfach „Sprachen" nennen.

Beispiele 3.12 Die nachfolgenden Beispiele illustrieren den Begriff und werden zum Teil später wieder aufgegriffen.

1. Es sei A das Alphabet mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$. Dann ist die Menge der natürlichen Zahlen in der üblichen Dezimaldarstellung, wo die erste Ziffer einer von Null verschiedenen Zahl stets ungleich 0 ist, eine Sprache über A.

2. Es sei A das Alphabet mit allen Buchstaben der deutschen Sprache und mit dem Leerzeichen „_", dem Punkt „." und den Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Dann sind

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{\mathit{Montag\_}, \mathit{Dienstag\_}, \ldots, \mathit{Sonntag\_}\}, \\ L_2 &:= \{\mathit{den\_}\}, \\ L_3 &:= \{1.\_, 2.\_, \ldots, 31.\_\}, \\ L_4 &:= \{\mathit{Januar\_}, \mathit{Februar\_}, \ldots, \mathit{Dezember\_}\}, \\ L_5 &:= \{2000, 2001, \ldots, 3000\}, \end{aligned}$$

formale Sprachen über A. Wir werden später sehen, wie wir durch eine einfache Form der Komposition dieser Sprachen eine Sprache mit vollständigen Datumsangaben der Art

$$\mathit{Dienstag\_den\_}11.\_\mathit{Januar\_}2000$$

erreichen können (vgl. Beispiel 3.34 Nr. 7).

3. Eine Menge von *Wörtern* L kann selbst als Alphabet dienen. Ist etwa $L := \{\mathit{Max}, \mathit{raucht}, \mathit{lacht}\}$, so ist die Menge mit den Sätzen (formal: Wörtern über L) „*Max raucht*" und „*Max lacht*" eine Sprache über L. In diesem Sinn kann jede Menge von Sätzen der deutschen Sprache als eine formale Sprache über einem Wortalphabet beschrieben werden.

3.2 Relationen

Mit Relationen lassen sich Beziehungen zwischen Elementen von Mengen formalisieren. Von einer Relation spricht man genauer, wenn immer dieselbe Anzahl von Elementen in Beziehung steht.

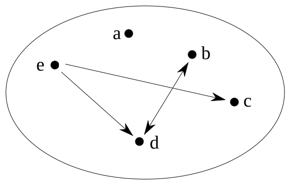
Definition 3.13 Eine Menge R wird n–stellige *Relation* genannt genau dann, wenn es Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gibt ($n \geq 1$), wo $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$. Statt $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$ schreiben wir kurz $R(a_1, \ldots, a_n)$. Gilt $A_1 = \ldots = A_n =: A$, so heißt R eine *n–stellige Relation auf A*.

Beispiel 3.14 Tabellen der Art

Name	Geschlecht	Dienstalter	Geburtsdatum	Gehaltsklasse
Maier	m	7	11.2.63	I
Kurz	w	13	11.3.67	III
Müller	w	14	2.12.73	I
Santorini	m	9	5.5.64	IV
...	...	...	...	...

stellen Relationen dar, die Zahl der Tabellenspalten bestimmt die Stelligkeit. Die Beispieltabelle enthält 5-Tupel aus dem kartesischen Produkt einer Menge A_1 von Namen, der Menge $A_2 := \{m, w\}$, einer Menge A_3 von Geburtsdaten und der Menge A_4 der Gehaltsklassen. In der Informatik werden Tabellen dieser Art in sogenannten relationalen Datenbanken gespeichert und abfragbar gemacht.

Viele der in der Mathematik auftretenden Relationen sind zweistellig. Zur Darstellung von zweistelligen Relationen auf endlichen Mengen verwendet man häufig Schaubilder mit Pfeilen. Ein Pfeil von einem Element x zu einem Element y deutet an, daß $R(x, y)$ gilt.

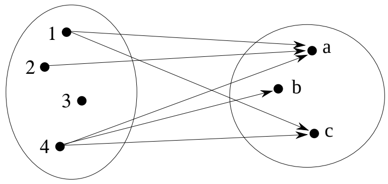


Alternativ können Relation auf endlichen Mengen als *Matrix* von Wahrheitswerten dargestellt werden. Wir schreiben $M[i, j]$ für den Eintrag in Zeile i und Spalte j der Matrix M. Ein Eintrag $M[i, j] = 1$ (resp. 0) steht für $R(i, j)$ (resp. $\neg R(i, j)$). Für die oben abgebildete Relation R ergibt sich folgende Matrix M.

R	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	0
b	0	0	0	1	0
c	0	0	0	0	0
d	0	1	0	0	0
e	0	0	1	0	1

Diagramm- und Matrixdarstellung können natürlich auch für beliebige zweistellige Relationen $R \subseteq A \times B$ verwendet werden.

Beispiel 3.15 Die Relation



enthält genau die Paare $\langle 1,a\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 4,a\rangle, \langle 4,b\rangle$ und $\langle 4,c\rangle$. In Matrixform ergibt sich

R	a	b	c
1	1	0	1
2	1	0	0
3	0	0	0
4	1	1	1

Charakteristisch für zweistellige Relationen—im Gegensatz zu den nachfolgend zu besprechenden Funktionen—ist es, daß ein gegebenes Element zu *mehreren* anderen Elementen in Beziehung stehen kann, wie auch die beiden vorausgegangenen Beispiele verdeutlichen.

Beispiele 3.16 Hier eine kleine Auswahl weiterer Relationen.

1. Es sein $A = \{a,b,c\}$. Wie in Definition 3.9 bezeichne A^* die Menge aller Wörter über dem Alphabet A. Die Relation R, die auf ein Paar $\langle v,w\rangle \in A^* \times A^*$ zutrifft genau dann, wenn v ein Präfix (Wortanfang) von w ist, ist eine zweistellige Relation auf A^*. Die Präfixe von $aabc$ sind beispielsweise $\langle\ \rangle$ (leeres Wort, oft als „ϵ" notiert) sowie die Wörter a, aa, aab und $aabc$ (eine formale Definition des Begriffs „Präfix" werden wir in Beispiel 3.34 Nr. 5 geben). Verwandt ist die Suffixrelation, die auf ein Paar $\langle v,w\rangle \in A^* \times A^*$ zutrifft genau dann, wenn v ein Suffix (Wortende) von w ist. Die Suffixe von $aabc$ sind $\langle\ \rangle$, c, bc, abc und $aabc$.

2. Die übliche „kleinergleich"–Relation „$\leq$" ist eine zweistellige Relation auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Statt „$\leq (a,b)$" schreibt man in Infixnotation „$a \leq b$". Auch die „kleinergleich"–Relation auf $\mathbb{N}$ ist eine

zweistellige Relation. Obwohl beide Relationen formal unterschiedliche Mengen sind, wird dasselbe Zeichen „$\leq$" verwendet.

3. Für natürlich Zahlen n und m ist die *Teilbarkeitsrelation* T definiert durch $T(n, m) :\Leftrightarrow n$ teilt $m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$: $n \cdot k = m$. Falls n die Zahl m teilt, schreibt man kurz $n|m$.

4. Jede Teilmenge A einer Menge M ist eine einstellige Relation auf M und umgekehrt, wobei M wie in Beispiel 3.8 Nr. 1 als Produkt mit nur einem Faktor aufgefaßt wird. In einer Menge von Personen M definiert die Eigenschaft, weiblich zu sein, eine einstellige Relation W auf M. In der Linguistik wird oft die Bedeutung von intransitiven Verben, Nomen, und (unter Einschränkungen) Adjektiven durch einstellige Relationen auf einer Menge M, die durch den Sprechkontext gegeben ist, formalisiert.

5. Einfach transitive Verben wie „liebt" oder „kennt" entsprechen zweistelligen Relationen auf der durch den Sprechkontext gegebenen Menge M.

6. Ist A eine Menge von Personen, so lassen sich viele Verwandschaftsbeziehungen als binäre Relationen formalisieren. Wir können etwa die „Elternbeziehung" E definieren durch $E(a, b) :\Leftrightarrow a$ ist Elternteil von b. Analog definieren wir die Kinderbeziehung K durch $K(a, b) :\Leftrightarrow a$ ist Kind von b. In ähnlicher Weise können wir Vater-, Mutter-, Schwester-, Bruder-, Vettern- und andere Beziehungen definieren.

7. Es sei $\mathcal{B} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Menge der Felder auf dem Schachbrett, $\mathcal{F}$ sei eine Figur, etwa ein Springer oder ein Läufer. Dann bildet die Menge $R_{\mathcal{F}}$ aller Felder-Paare $\langle\langle x, n\rangle, \langle y, m\rangle\rangle \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, so daß man (auf dem ansonsten leeren Schachbrett) mit der Figur $\mathcal{F}$ von $\langle x, n\rangle$ nach $\langle y, m\rangle$ ziehen kann, eine zweistellige Relation auf der Menge $\mathcal{B}$.

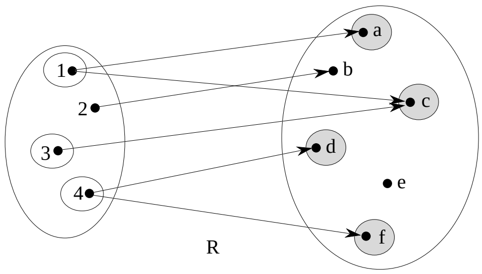
8. Wenn wir die Menge der Figuren bei einer bestimmten Stellung auf einem Schachbrett nehmen, so bilden die geordneten Paare von Figuren derselben Farbe, die sich bei der aktuellen Stellung gegenseitig decken, eine zweistellige Relation. Eine andere Relation bilden die geordneten Paare $\langle x, y\rangle$ von Figuren unterschiedlicher Farbe, wo Figur x die Figur y bedroht.

Definition 3.17 Sei $R \subseteq A \times B$ eine zweistellige Relation, $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$. Die Menge $R(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X\colon R(x,y)\}$ heißt das *Bild* von X unter R, Die Menge $R\lceil X := \{\langle x,y\rangle \mid R(x,y), x \in X\}$ heißt die *Einschränkung* von R auf X.

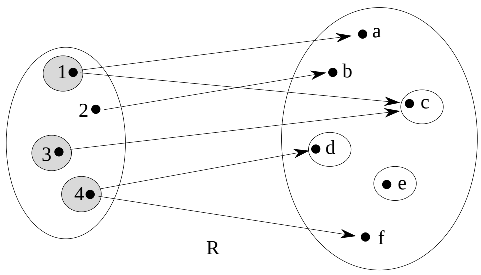
Die Mengen $R\lceil X$ und $R(X)$ sollten nicht verwechselt werden. Man beachte, daß die Einschränkung $R\lceil X$ eine Relation—damit eine Menge geordneter Paare—ist, hingegen das Bild $R(X)$ eine einfache Teilmenge von B repräsentiert.

Beispiele 3.18 Hierzu einige Illustrationen.

1. In der nachfolgenden Abbildung ist $\{a,c,d,f\}$ das Bild von $\{1,3,4\}$ unter der durch Pfeile symbolisierten Relation R:



Um diese Menge zu erhalten, muß man die hinteren Einträge y all derjenigen geordneten Paare $\langle x,y\rangle$ aus R zusammenfassen, wo der vordere Eintrag x aus $\{1,3,4\}$ ist. Entsprechend wäre $\{b,d,f\}$ das Bild von $\{2,4\}$. Das Urbild von $\{c,d,e\}$ unter R ist $\{1,3,4\}$:

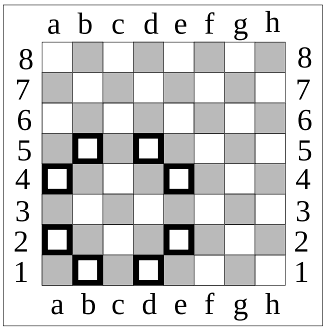


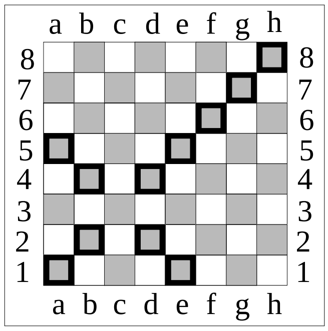
2. Für die Relation R, die in obigen Abbildungen dargestellt ist, ist die Einschränkung von R auf $\{1,2,3\}$ die Menge

$\{\langle 1,a\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,c\rangle\}$. Die Paare $\langle 4,d\rangle$ und $\langle 4,f\rangle$ aus R gehören nicht zu $R\lceil\{1,2,3\}$, da $4 \notin \{1,2,3\}$.

3. Ist A eine Menge von Personen, K wie in Beispiel 3.16 Nr. 6 die Kinderbeziehung, $a \in A$, so ist $K(\{a\})$ die Menge der Eltern der Person a. Ist auch $b \in A$, so bilden die (nicht notwendig gemeinsamen) Eltern von a und b die Menge $K(\{a,b\})$.

4. Es sei $\mathcal{B} := \{a,b,c,d,e,f,g,h\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ die Menge der Felder auf dem Schachbrett, S sei ein Springer, L ein Läufer. Die Relationen R_S und R_D auf $\mathcal{B}$ seien wie in Beispiel 3.16 Nr. 7 erklärt. Dann bilden die umrandeten Felder das Bild der Feldermenge $\{C3\}$ unter R_S bzw. R_L.





Lemma 3.19 *Es sei $R \subseteq A \times B$ und $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$. Dann ist $R(X_1) \subseteq R(X_2)$. Ist $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$, so ist $R^{-1}(Y_1) \subseteq R^{-1}(Y_2)$.*

Beweis. Es sei $b \in R(X_1)$. Dann existiert ein $x \in X_1$ mit $\langle x,b\rangle \in R$. Wegen $X_1 \subseteq X_2$ existiert auch ein $x \in X_2$ mit $\langle x,b\rangle \in R$. Damit gilt $b \in R(X_2)$. Die zweite Behauptung ist eine Instanz der ersten. ∎

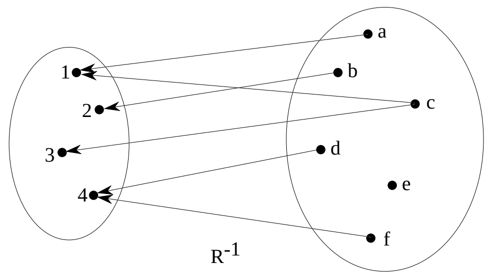
3.3 Umkehrrelation und Komposition von Relationen

Das Vorgehen ist nun dasselbe wie im vorhergehenden Kapitel: nachdem wir Relationen eingeführt haben, betrachten wir nun Operationen, die es erlauben, aus bestehenden Relationen neue zu bilden. Zwei Operationen, Komposition und Umkehrung, sind hierbei von vorrangiger Bedeutung.

Definition 3.20 Sei $R \subseteq A \times B$ eine zweistellige Relation. Die Menge $R^{-1} := \{\langle y, x\rangle \mid R(x,y)\}$ heißt die zu R *inverse* Relation oder die *Umkehrrelation* von R. Ist $Y \subseteq B$, so heißt $R^{-1}(Y)$ das *Urbild* von Y unter R.

Beispiele 3.21 Einige Beispiele zur Illustration der Umkehrrelation:

1. Ist die Relation R durch Pfeile dargestellt, so ergibt sich die inverse Relation R^{-1} durch Umkehrung aller Pfeile. Die Umkehrrelation der in Beispiel 3.18 Nr. 1 abgebildeten Relation R hat damit die folgende Form:



2. Ist $R \subseteq A \times A$ in Matrixform dargestellt, so ergibt sich R^{-1} durch Spiegelung an der Diagonalen.

R	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	1
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0

R^{-1}	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	0

3. Formalisiert die Relation R die Bedeutung eines transitiven Verbs, so ergibt sich die Relation R^{-1} durch Passivbildung. Die inverse Relation zu „liebt" ist also „wird-geliebt-von".

4. Es sei A eine Menge von Personen, K wie in Beispiel 3.16 Nr. 6 die Kinderbeziehung. Die zu K inverse Relation K^{-1} ist die „Elternbeziehung" E, und $E^{-1} = K$.

Lemma 3.22 *Es seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq A \times B$ zweistellige Relationen. Dann gilt stets*

1. $(R^{-1})^{-1} = R$,
2. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$,
3. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

Beweis. Wir zeigen Teil 2, die anderen Beweise bleiben dem Leser überlassen (vgl. Aufgabe 3.16). Es sei $\langle b, a\rangle \in (R \cup S)^{-1}$. Dann gilt $\langle a, b\rangle \in (R \cup S)$ und somit $\langle a, b\rangle \in R$ oder $\langle a, b\rangle \in S$. Im ersten Fall folgt $\langle b, a\rangle \in R^{-1}$, im zweiten Fall $\langle b, a\rangle \in S^{-1}$, somit gilt stets $\langle b, a\rangle \in R^{-1} \cup S^{-1}$. Wir haben damit die Inklusion $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$ bewiesen. Die Umkehrung folgt analog. ■

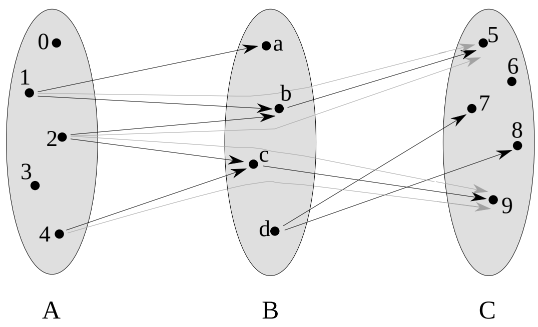
Definition 3.23 Es seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ zwei Relationen. Ihr *Produkt* (oder ihre *Komposition*) $R \circ S$ ist erklärt durch

$$R \circ S := \{\langle a, c\rangle \in A \times C \mid \exists b \in B\colon R(a, b) \text{ und } S(b, c)\}.$$

Für das n-fache Produkt $R \circ \cdots \circ R$ einer Relation mit sich selbst schreiben wir kurz R^n $(n \geq 1)$.[1]

Hinweis 3.24 Die Notation für das Produkt zweier Relationen ist in der Literatur nicht einheitlich. In manchen Büchern wird für die oben definierte Relation $R \circ S$ genau umgekehrt $S \circ R$ geschrieben. Man sollte sich also gegebenenfalls vergewissern, welche Konvention der Notation zugrundeliegt.

Offensichlich ist mit $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ auch $R \circ S$ wieder eine Relation, und zwar eine Teilmenge von $A \times C$. Das folgende Bild bietet ein illustrierendes Beispiel. Die Relation $R \circ S$ ist durch graue Pfeile symbolisiert.



[1] Die Reihenfolge der Klammerung ist hier irrelevant, vgl. 3.27 unten.

Sind A, B, C endliche Mengen mit m, n beziehungsweise l Elementen, und sind die Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ durch die Matrizen M_R und M_S repräsentiert, so erhält man die Matrix M von $R \circ S$ durch eine spezielle Art der Matrixmultiplikation aus M_R und M_S. M hat m Zeilen und l Spalten. Der Eintrag $M[i,j]$ ergibt sich als Disjunktion (i.e., Maximum) über alle Produkte $M_R[i,k] \cdot M_S[k,j]$ für $1 \leq k \leq n$. Im Fall der oben abgebildeten Relationen R und S erhält man

R	a	b	c	d
0	0	0	0	0
1	1	1	0	0
2	0	1	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	1	0

$\times$

S	5	6	7	8	9
a	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1
d	0	0	1	1	0

$=$

$R \circ S$	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1

Beispiel 3.25 Wenn wir wie in Beispiel 3.16 Nr. 6 auf einer Menge von Personen die üblichen Verwandtschaftsbeziehungen einführen, so ist die Komposition der Vaterbeziehung mit der Elternbeziehung die Großvater-Relation. Die Komposition der Kinderbeziehung mit sich selbst ergibt die Enkelbeziehung.

Der einfache Beweis des nachfolgenden Lemmas wird als Übung dem Leser überlassen (vgl. Aufgabe 3.19).

Lemma 3.26 *Es seien A, B und C Mengen. Für jeden Index $i \in I \cup \{1,2\}$ sei stets $R_i \subseteq A \times B$ und $S_i \subseteq B \times C$.*

1. *Ist $R_1 \subseteq R_2$ und $S_1 \subseteq S_2$, so auch $R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$.*
2. *Es sei $R \subseteq A \times B$. Dann ist $R \circ (\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I}(R \circ S_i)$.*
3. *Es sei $S \subseteq B \times C$. Dann ist $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ S = \bigcup_{i \in I}(R_i \circ S)$.*

Lemma 3.27 *Die Komposition zweistelliger Relationen ist assoziativ: Sind $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ und $T \subseteq C \times D$ Relationen, so gilt $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.*

Beweis. Zunächst folgt aus Definition 3.23 unmittelbar, daß $R \circ (S \circ T) \subseteq A \times D$ und $(R \circ S) \circ T \subseteq A \times D$ gilt. Nun gilt für alle $a \in A$ und $d \in D$

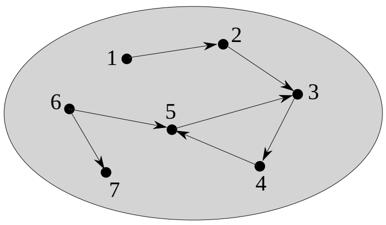
$$\begin{aligned}
\langle a, d\rangle \in R \circ (S \circ T) &\Leftrightarrow \exists b \in B\colon (\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, d\rangle \in S \circ T) \\
&\Leftrightarrow \exists b \in B, c \in C\colon (\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S \wedge \langle c, d\rangle \in T) \\
&\Leftrightarrow \exists c \in C\colon (\langle a, c\rangle \in R \circ S \wedge \langle c, d\rangle \in T) \\
&\Leftrightarrow \langle a, d\rangle \in (R \circ S) \circ T
\end{aligned}$$

wodurch die Behauptung folgt. ■

Die folgende Begriffsbildung wird später verschiedentlich nützlich.

Definition 3.28 Es sei $R \subseteq A \times A$. Für $n \geq 0$ heißt eine Folge $a_0, \ldots, a_n$ von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elementen aus A eine *R-Kette* der Länge n von a_0 nach a_n genau dann, wenn $R(a_i, a_{i+1})$ für $i = 0, \ldots, n-1$ gilt. Eine R–Kette $a_0, \ldots, a_n$ heißt *R–Zyklus* genau dann, wenn $a_0 = a_n$ gilt. Ein R–Zyklus heißt *nicht-trivial* genau dann, wenn er zumindest zwei verschiedene Elemente enthält.

In der nachfolgenden Abbildung ist $1, 2, 3, 4, 5, 3, 4$ eine R–Kette der Länge 7 der durch Pfeile dargestellten Relation R. Es ist $3, 4, 5, 3$ ein nichttrivialer R–Zyklus.



Lemma 3.29 *Es sei R eine zweistellige Relation auf A und $n \geq 1$. Dann gilt $R^n = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \mid$ es ex. eine R–Kette der Länge n von a nach $b\}$.*

Der Beweis ist offenkundig und wird ausgelassen.

3.4 Funktionen

Funktionen sind spezielle Relationen. Während ein Element a im allgemeinen zu sehr vielen anderen Elementen $b_1, b_2 \dots$ in einer vorgegebenen Relation R stehen kann, fordert man bei Funktionen, daß es höchstens ein solches Element b gibt, das man dann als *Bild* von a unter der Funktion bezeichnet. Fast immer betrachtet man Funktionen *von einer Menge A in eine Menge B*. Diese Sprechweise beinhaltet dann, daß auch *jedes* $a \in A$ ein Bild in B besitzt, welches dann eindeutig bestimmt ist.[2]

Definition 3.30 Eine zweistellige Relation $R \subseteq A \times B$ heißt *Funktion* oder *Abbildung* (engl. „function" oder „mapping") genau dann, wenn jedes Element von A höchstens ein Bild unter R hat, das heißt, wenn gilt

$$\forall x, y, z \colon ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \Rightarrow y = z).$$

gilt. Die Menge $Def(R) := \{a \in A \mid \exists b \in B \colon R(a, b)\}$ wird dann der *Definitionsbereich* (engl. „domain"), B der *Bildbereich* (engl. „codomain") der Funktion R genannt.

Um Funktionen zu bezeichnen, verwendet man typischerweise Buchstaben wie f, g und ähnliche.

Definition 3.31 Ist $f \subseteq A \times B$ eine Funktion mit Definitionsbereich A, so heißt f *Funktion von A nach B*, man schreibt kurz $f \colon A \to B$. Für jedes $a \in A$ ist dann das *Bild* $b \in B$ mit $f(a, b)$ eindeutig bestimmt, wir schreiben $b = f(a)$. Die Elemente von A heißen auch die *Argumente* der Funktion, $f(a)$ heißt auch der *Wert* von a unter f. Hat speziell A die Form B^n, so heißt f eine *n–stellige Funktion auf B*.

Abbildung 3.1 illustriert diese Konzepte.

Bemerkung 3.32 Auf drei Punkte, die gelegentlich zu Unsicherheiten führen, sei besonders hingewiesen:

[2] Manchmal spricht man dann genauer von einer *totalen* Funktion, um zu betonen, daß *jedes* $a \in A$ ein Bild hat. Wenn man explizit erlauben will, daß manche Elemente kein Bild haben, so spricht man auch von einer *partiellen* Funktion.

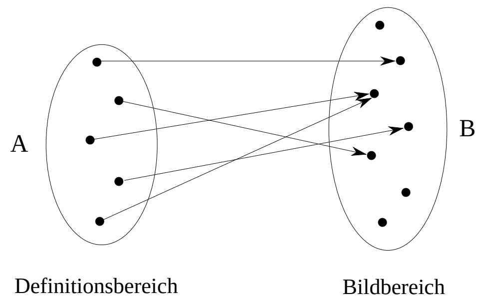


Abbildung 3.1: Beispiel einer Funktion $f\colon A \to B$.

1. Vorsicht: eine n-stellige Funktion auf B ist — als Relation betrachtet — $(n+1)$-stellig.

2. Es sei an dieser Stelle nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß jede Funktion f eine Menge geordneter Paare darstellt, genauer gilt stets $f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in \mathit{Def}(f)\}$.

3. Man beachte, daß Definition 3.31 ein gewisses Ungleichgewicht beinhaltet. Ist $f\colon A \to B$, so hat jedes $a \in A$ ein Bild unter f in B. Es braucht aber *nicht* jedes $b \in B$ als Bild aufzutreten, wie auch Abbildung 3.1 deutlich macht. Demzufolge ist der Bildbereich einer gegebenen Funktion f mit Definitionsbereich A leider nicht eindeutig. Jede Menge M, die die Menge $\{f(a) \mid a \in A\}$ umfaßt, ist im Prinzip ein möglicher Bildbereich. Bei konkreten Beispielen bietet sich jedoch oft in natürlicher Weise ein ganz bestimmter Bildbereich an.

Mit

$$B^A := \{f \mid f\colon A \to B\}$$

bezeichnen wir nachfolgend die Menge aller Funktionen von A nach B. Da die Notation oft verwendet wird, sollte man sie gut in Erinnerung behalten. Eine Motivation für die Schreibweise ergibt sich aus folgendem Lemma. Den Beweis, der vollständige Induktion verwendet, überlassen wir als Übung dem Leser (vgl. Aufgabe 3.22).

Lemma 3.33 *Sind A und B endliche Mengen mit n resp. m Elementen, so hat B^A genau m^n Elemente.*

Zur Darstellung von Funktionen gibt es zahlreiche Methoden. Funktionen auf kleinen endlichen Mengen werden oft in Form von Diagrammen wie

$$\begin{bmatrix} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 3 \\ c & \mapsto & 2 \\ d & \mapsto & 1 \end{bmatrix}$$

repräsentiert, wobei allerdings der volle Bildbereich im allgemeinen nicht zu rekonstruieren ist. Eng verwandt ist die tabellarische Darstellung der Funktionswerte zu gegebenem Argument, die bei etwas umfangreicherem endlichen Definitionsbereich üblich ist. Natürlich ist für Funktionen mit endlichem Definitions- und Bildbereich auch eine Matrixdarstellung wie vorher bei den Relationen möglich (vergleiche Aufgabe 3.20). Oft werden Funktionen auch in Form einer Vorschrift spezifiziert, die angibt, wie das Bild eines Elements aussieht, wie im Beispiel

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto 2x$$

wo $x \mapsto 2x$ besagt, daß unter f jedes Element auf sein Zweifaches abgebildet wird.

Beispiele 3.34 Nachfolgend nun eine längere Liste von Funktionen, wobei die Beispiele aus dem Leben zum Teil streng genommen eine striktere Formalisierung voraussetzen. Die ersten beiden Beispiele sollen dazu dienen, zwei unterschiedliche Intuitionen, die mit dem Funktionsbegriff verbunden sind, zu verdeutlichen.

1. Eine Klasse von Funktionen läßt sich auf der intuitiven Ebene dadurch beschreiben, daß man für eine Eingabe einen bestimmten Wert berechnen möchte. Wenn zum Beispiel danach gefragt wird, wieviel Geld man bei einem Anfangskapital von 1000 DM und einem Zinssatz von 2% nach $n = 0, 1, 2, \ldots$ Jahren angespart hat, so wird die Antwort durch eine Funktion von $\mathbb{N}$ in die rationalen Zahlen beschrieben. Sehr viele weitere numerische Funktionen, etwa zur Inhalts- oder Flächenberechnung, sind ihrer Natur und Verwendung nach ähnlich.

2. Bei einer anderen Klasse von Funktionen steht der Gedanke im Vordergrund, in Form der Funktion eine Art *Korrespondenz* zwischen Argumenten und ihren Bildern zu formalisieren, und es macht kaum Sinn, von der ,,Berechnung eines Werts“ zu sprechen. In einer Schließanlage

können wir jedem Schlüssel das zugehörige Schließfach zuweisen. Dies definiert eine Funktion von der Menge der Schlüssel in die Menge der Schließfächer. Verwandt ist die Festlegung einer Reihenfolge, wo wir eine Korrespondenz zwischen den Elementen einer Menge M und einem Anfangsintervall $A = [1, 2, \ldots, n]$ von $\mathbb{N}$ erhalten, die formal durch eine Funktion $M \to A$ erfaßt wird. Für Funktionen dieser Art ist der (formal synonyme!) Begriff „Abbildung" näher an der Intuition.

3. Jede Klassifikationen, bei der jedes Objekt einer gegebenen Menge M genau einer Klasse einer Menge von Klassen K zugeordnet wird, repräsentiert eine Funktion von M in K.

4. Ist M eine Menge, so sind Vereinigung „$\cup$" und Durchschnitt „$\cap$" zweistellige Funktionen auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Komplementbildung bezüglich M (vgl. Def. 2.15) ist eine einstellige Funktion auf $\mathcal{P}(M)$.

5. Ist A^* die in Definition 3.9 beschriebene Menge der Wörter über dem Alphabet A, so ist die *Konkatenation*„$\circ$" von Wörtern eine zweistellige Funktion auf A^*. Die Konkatenation wird in Infixschreibweise notiert, und ist durch $a_1 \cdots a_n \circ b_1 \cdots b_m := a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ definiert. Zum Beispiel ergibt die Konkatenation von „*Computer*" mit „*linguistik*" das Wort „*Computerlinguistik*". Mittels des Konkatenationsbegriffs könnnen wir die Präfixrelation und die Suffixrelation (vgl. Beispiel 3.16 Nr. 1) formal definieren: Das Wort $v \in A^*$ ist ein *Präfix* (resp. *Suffix*) des Wortes $w \in A^*$ genau dann, wenn ein Wort $u \in A^*$ existiert, so daß $w = v \circ u$ (resp. $w = u \circ v$) gilt.

6. Es sei A eine Menge und $\mathcal{R}(A)$ die Menge aller zweistelligen Relationen auf A. Die in Definition 3.23 eingeführte Komposition „$\circ$" von Relationen ist eine zweistellige Funktion auf $\mathcal{R}(A)$.

7. Es bezeichne $\mathcal{L}(A)$ die in Definition 3.11 eingeführte Menge aller Sprachen über dem Alphabet A. Für Sprachen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(A)$ heißt

$$L_1 \odot L_2 := \{u \circ v \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

die *Komposition* von L_1 und L_2. Dabei bezeichnet „$\circ$" die in Beispiel 5 erklärte Konkatenation. Die Komposition „$\odot$" ist eine zweistellige Funktion auf $\mathcal{L}(A)$. Wir haben nur der Verständlichkeit halber ein neues Symbol verwendet, oft wird auch für die Komposition von Sprachen das Symbol „$\circ$" verwendet. Es ist leicht zu sehen, daß die

Komposition von Sprachen assoziativ ist, das heißt es gilt für beliebige Sprachen L_1, L_2, L_3 über A stets $(L_1 \odot L_2) \odot L_3 = L_1 \odot (L_2 \odot L_3)$. Die Komposition $L_1 \odot L_2 \odot \cdots \odot L_5$ der in Beispiel 3.12 Nr. 2 erwähnten Sprachen $L_1, \ldots, L_5$ ergibt die dort beschriebene Menge aller Datumsangaben des dritten Jahrtausends.

8. Die Alters-Relation, zu der ein Paar $\langle p, n \rangle$ gehört genau dann, wenn n das Alter von p ist, hat funktionalen Charakter. Ähnlich werden in behördlichen Formularen sehr viele Werte weiterer „Funktionen“ abgefragt: *Beruf*, *Adresse*, *Religion*, *Steuerklasse*, *Zahl-der-Kinder* etc. Sind im Gegensatz dazu mehrere Antworten möglich, wie etwa bei *Kinder* oder *Erziehungsberechtigt*, so hat die Abfrage relationalen Charakter.

9. Für das n-stellige kartesische Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$ definieren wir die n *Projektionsfunktionen*

$$\pi_i\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i\colon \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mapsto a_i \ (1 \leq i \leq n).$$

   Kartesische Produkte und zugehörige Projektionsfunktionen zeichnen sich durch die folgende Universalitätseigenschaft aus: ist M eine Menge, und sind Funktionen $f_i\colon M \to A_i$ für $1 \leq i \leq n$ vorgegeben, so gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $g\colon M \to \Pi_{i=1}^n A_i$, so daß $f_i = g \circ \pi_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt (vgl. Aufgabe 3.7).

10. Addition und Multiplikation (Sinus und Cosinus) sind zweistellige (einstellige) Funktionen auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Einschränkung der Addition von $\mathbb{R}$ auf die Menge $\mathcal{Q}$ der rationalen Zahlen ist eine zweistellige Funktion auf $\mathcal{Q}$, nämlich die übliche Addition auf $\mathcal{Q}$. Beide genannten Additionsfunktionen sind als Mengen unterschiedlich, obwohl in der Regel dasselbe Symbol „+“ verwendet wird.

11. Die in der Informatik verwendeten „Arrays“ weisen (im eindimensionalen Fall) jedem Wert i aus einem Anfangsintervall $[1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ der natürlichen Zahlen einen Eintrag aus einer Menge B zu. Damit kann man ein Array auffassen als Modellierung einer Funktion $f\colon [1, n] \to B$. Man beachte auch die Verwandtschaft zu den oben angegebenen Diagrammdarstellungen von endlichen Funktionen.

12. Bei geeigneter Betrachtungsweise definiert jede binäre Relation $R \subseteq A \times B$ eine Funktion von $\mathcal{P}(A)$ nach $\mathcal{P}(B)$: in der Tat, auf der Basis von Definition 3.17 ordnet R jeder Teilmenge X von A genau eine Teilmenge $R(X)$ von B zu. Analog ist auch $R^{-1}\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ eine Funktion.

13. Mittels des Begriffs der Funktion können wir nun *Multimengen* (vgl. Abschnitt 2.7.2) formalisieren. Eine *Multimenge* ist eine Abbildung $m_A\colon A \to \mathbb{N}$. Intuitiv gibt das Bild eines Elements $a \in A$ unter der Abbildung m_A die Zahl seiner Vorkommen in der Multimenge an.

Hier noch ein weiteres Beispiel, das später verschiedentlich auftritt.

Definition 3.35 Es sei A eine Menge. Die Funktion $Id_A := \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$ wird *Identität auf* A (auch *Identitätsrelation* oder *Identitätsfunktion*) genannt.

Beispiel 3.36 Es sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dann kann Id_A in Matrixform wie folgt dargestellt werden.

R	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1

Dies verdeutlicht, warum Id_A manchmal die *Diagonale* von A genannt wird.

Mit den nun eingeführten Schreibkonventionen können wir die in den Definitionen 3.17 und 3.20 eingeführten Begriffe wie folgt für Funktionen darstellen.

Definition 3.37 Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion, $X \subseteq A, Y \subseteq B$.

(a) Die Menge $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ heißt das *Bild* von X unter der Funktion f.

(b) Die Menge $f^{-1} := \{\langle y, x\rangle \mid x \in A, f(x) = y\} \subseteq B \times A$ heißt *Umkehrrelation* zur Funktion f. Die Menge $f^{-1}(Y)$ heißt das *Urbild* von Y unter f.

(c) Die Menge $f\lceil X := \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, f(x) = y\}$ heißt die *Einschränkung* von f auf X. Wir fassen $f\lceil X$ auf als eine Funktion mit Definitionsbereich X und Bildbereich B.

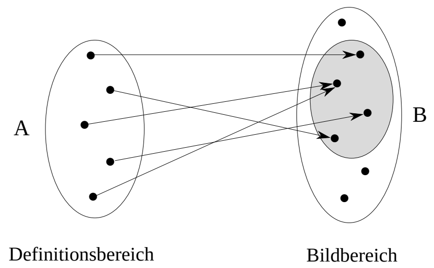


Abbildung 3.2: Unterschied zwischen Bildbereich und Bild des Definitionsbereichs.

Man beachte, daß das in (a) erklärte Bild von A unter f vom „Bildbereich“ B von f durchaus verschieden sein kann, wie Abbildung 3.2 illustriert. Die Wortwahl in Teil (b) macht deutlich, daß die Umkehr*relation* f^{-1} einer Funktion f im allgemeinen keine Funktion ist! Auch dieser Sachverhalt läßt sich aus Abbildung 3.2 leicht ersehen. Wir werden in Kapitel 3.5 spezielle Bedingungen dafür angeben, daß auch f^{-1} wieder eine Funktion ist.

Definition 3.38 Eine einstellige Funktion $f\colon A \to A$ heißt

1. *nilpotent* genau dann, wenn $f \circ f = Id_A$ gilt,
2. *idempotent* genau dann, wenn $f \circ f = f$ gilt.

Offenkundig läßt sich nun Id_A dadurch charakterisieren, daß es die einzige Funktion von A in A ist, die gleichzeitig nilpotent und idempotent ist.

Ähnlich wie bei Mengen können auch Funktionen, die in unterschiedlicher Weise definiert wurden, gleich sein. Das folgende Lemma beinhaltet ein Standardverfahren, wie man die Gleichheit zweier Funktionen nachweisen kann.

Lemma 3.39 (Extensionalitätsprinzip für Funktionen) *Zwei Funktionen f und g sind genau dann gleich, $f = g$, wenn sie denselben Definitionsbereich haben und für dieselben Argumente dieselben Bilder ergeben.*

Beweis. Wie in Bemerkung 3.32 Teil 2 festgehalten, gilt stets

$$f \quad = \quad \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in Def(f)\}$$

$$g \quad = \quad \{\langle x, g(x)\rangle \mid x \in Def(g)\}.$$

Es sei nun $f = g$. Ist $a \in Def(f)$, so folgt aus $\langle a, f(a)\rangle \in f$ auch $\langle a, f(a)\rangle \in g$, das heißt, es gilt $a \in Def(g)$. Damit folgt $Def(f) \subseteq Def(g)$. Umgekehrt folgt analog $Def(g) \subseteq Def(f)$, das heißt, es gilt $Def(f) = Def(g)$. Aus $\langle a, f(a)\rangle \in f = g$ und $\langle a, g(a)\rangle \in g$ folgt $f(a) = g(a)$, da g Funktion ist.

Es gelte umgekehrt, daß f und g denselben Definitionsbereich haben und für dieselben Argumente dieselben Bilder ergeben. Sei $\langle a, b\rangle \in f$. Dann ist $a \in Def(f) = Def(g)$. Da $b = f(a)$ folgt nach Voraussetzung $b = g(a)$. Also gilt $\langle a, b\rangle \in g$. Wir haben gezeigt, daß $f \subseteq g$. Umgekehrt folgt analog $g \subseteq f$, und damit mit Lemma 2.6 (ii) wie gewünscht $f = g$. ∎

Das nachfolgende Lemma macht Aussagen über die Bilder von Teilmengen unter einer Funktion. Wir greifen auf die in Definition 3.37, Teil (a), entwickelte Notation zurück.

Lemma 3.40 *Sei $f\colon A \to B$. Dann gilt stets*

$$\begin{array}{rl} (i) & \forall X, X' \subseteq A\colon f(X \cup X') = f(X) \cup f(X'), \\ (ii) & \forall X, X' \subseteq A\colon f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X'), \\ (iii) & \forall X \subseteq A\colon X \subseteq f^{-1}(f(X)), \\ (iv) & \forall Y \subseteq B\colon f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y. \end{array}$$

Beweis. Teil (i) wird als Übung offengelassen (vgl. Aufgabe 3.24). Zu Teil (ii): Es sei $X, X' \subseteq A$. Dann gilt für beliebiges b

$$\begin{aligned} b \in f(X \cap X') \quad &\Leftrightarrow \quad \exists a \in X \cap X'\colon f(a) = b \\ &\Leftrightarrow \quad \exists a\colon a \in X \wedge a \in X' \wedge f(a) = b \\ &\Rightarrow \quad \exists a \in X\colon f(a) = b \;\wedge\; \exists a' \in X'\colon f(a') = b \\ &\Leftrightarrow \quad b \in f(X) \cap f(X'). \end{aligned}$$

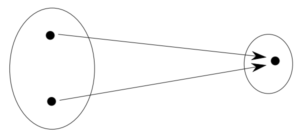
Hieraus folgt die Behauptung.

Zu Teil (iii): Sei $X \subseteq A$ und $x \in X$. Dann ist $f(x) \in f(X)$. Somit gilt $\{f(x)\} \subseteq f(X)$ und nach Lemma 3.19 auch $f^{-1}(\{f(x)\}) \subseteq f^{-1}(f(X))$. Trivialerweise gilt $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$. Damit folgt auch $x \in f^{-1}(f(X))$.

Zu Teil (iv): Es sei $Y \subseteq B$ und $b \in f(f^{-1}(Y))$. Dann existiert gemäß Definition 3.37, Teil (a), ein Element $a \in f^{-1}(Y)$ mit $f(a) = b$. Da $a \in f^{-1}(Y)$

existiert nach Definition 3.17, Teil (a), ein Element $y \in Y$ mit $\langle y, a\rangle \in f^{-1}$. Aus $\langle y, a\rangle \in f^{-1}$ ergibt sich nach Definition 3.37, Teil (d), daß $f(a) = y$. Da aber f Funktion ist, folgt aus $f(a) = b$ und $f(a) = y$ nun $b = y \in Y$. ∎

In der vorletzten Zeile im Beweis von (ii) hatten wir wieder sicherheitshalber mit zwei Variablennamen gearbeitet, damit klarer wird, daß man die Richtung der zugehörigen Implikation nicht notwendig umkehren kann. In der Tat gilt im allgemeinen *nicht* die Identität $f(X \cap X') = f(X) \cap f(X')$, wie folgendes einfache Beispiel zeigt (warum?):



Der Leser möge sich ähnliche Beispiele ausdenken, die zeigen, daß man auch in den Aussagen (iii) und (iv) im allgemeinen keine Gleichheit hat.

Da Funktionen spezielle Relationen sind, können wir auch die Komposition von Funktionen betrachten. Das folgende Lemma zeigt, daß die Komposition zweier Abbildungen gerade die Hintereinanderausführung der Abbildungen darstellt.

Lemma 3.41 *Es seien f: $A \to B$ und g: $B \to C$ Funktionen. Dann ist auch $f \circ g$: $A \to C$ eine Funktion, deren Werte durch $(f \circ g)(a) = g(f(a))$ gegeben sind ($a \in A$).*

Beweis. Zunächst folgt aus Definition 3.23 sofort, daß $(f \circ g) \subseteq A \times C$ gilt. Um zu zeigen, daß $f \circ g$ eine Funktion ist, müssen wir nachweisen, daß f jedem Element aus A genau ein Bild aus C zuordnet.

Wir zeigen zuerst („Existenz“), daß f jedem Element $a \in A$ zumindest ein Bild aus C zuordnet. In der Tat, mit $\langle a, f(a)\rangle \in f$ und $\langle f(a), g(f(a))\rangle \in g$ folgt nach Definition 3.23 $\langle a, g(f(a))\rangle \in (f \circ g)$.

Es bleibt noch die „Eindeutigkeit“ der Zuordnung zu zeigen. Seien $c, c' \in C$, und es gelte $\langle a, c\rangle \in (f \circ g)$ sowie $\langle a, c'\rangle \in (f \circ g)$. Dann existieren Elemente $b, b' \in B$ mit $\langle a, b\rangle \in f$ und $\langle b, c\rangle \in g$ sowie $\langle a, b'\rangle \in f$ und $\langle b', c'\rangle \in g$. Da f Funktion ist, folgt $b = b'$. Da g Funktion ist, folgt $c = c'$. Wir haben auch die Eindeutigkeit des Bildes nachgewiesen. Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß $f \circ g$: $A \to C$ Funktion ist.

Alle Paare $\langle a, g(f(a))\rangle$ (für $a \in A$) gehören zu $f \circ g$, wie wir im „Existenzteil" gesehen haben. Damit ist $g(f(a))$ das eindeutig bestimmte Bild von a unter der Funktion $f \circ g$. ■

Aus Lemma 3.27 folgt sofort als Spezialfall

Lemma 3.42 *Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, für $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon C \to D$ gilt stets $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.*

3.5 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Wir kommen zu einigen wichtigen Eigenschaften von Funktionen.

Definition 3.43 Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt *injektiv* (oder *eineindeutig*) genau dann, falls verschiedene Argumente stets verschiedene Werte unter f haben, das heißt, falls gilt

$$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

Eine injektive Funktion wird auch *Injektion* genannt. Wenn es eine injektive Funktion f von A nach B gibt, so bedeutet dies, daß B „bis auf Namensgebung" eine Kopie der Elemente von A enthält. Das Bild $f(A)$ hat dann nämlich dieselbe Anzahl von Elementen wie A selbst, wie in Abbildung 3.3 veranschaulicht wird. Der in Beispiel 3.34 Nr. 2 erwähnte „Korrespondenzgedanke" tritt hier offen zutage. Bezeichnen wir für eine endliche Menge M mit $|M|$ die Anzahl der Elemente von M (auch *Kardinalität* von M genannt), so gilt also:

Lemma 3.44 *Es seien A und B endliche Mengen. Gibt es eine injektive Funktion $f\colon A \to B$, so folgt $|A| \leq |B|$. Die Umkehrung gilt ebenfalls.*

Eine Umformulierung diese Lemmas ist in der Literatur unter der Bezeichung „pigeonhole principle" (Taubenloch-Prinzip) bekannt: gilt $|A| > |B|$, so kann es keine injektive Funktion von A nach B geben. Oder suggestiver: will man m Tauben auf n Löcher verteilen, und gilt $m > n$, so muß man zumindest in ein Loch zwei oder mehr Tauben stecken. Diese Prinzip hat als Beweismittel viele Anwendungen. Hierzu vergleiche man Aufgabe 3.27 am Kapitelende.

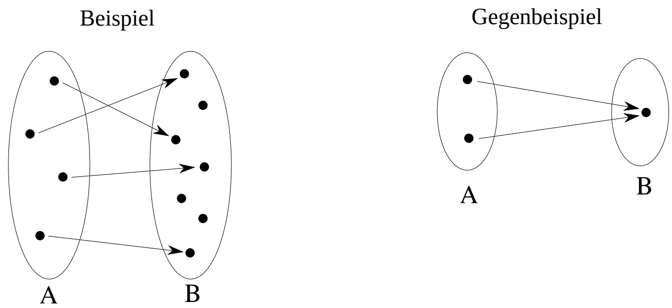
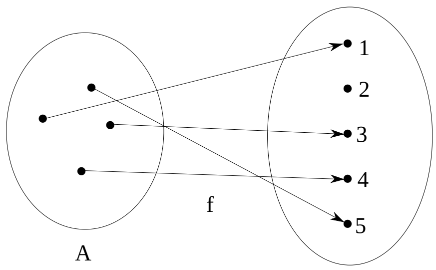


Abbildung 3.3: Injektivität von Funktionen.

Beispiele 3.45 Die Sitzordnung im Hörsaal definiert eine injektive Funktion von der Menge der Zuhörer auf die Menge der Plätze im Hörsaal. In einem Konzertsaal definiert die Platznummer eine injektive Funktion der Menge der Plätze in $\mathbb{N}$.

Beispiel 3.46 Injektive Funktionen $f\colon A \to B$ werden häufig in Situationen verwendet, wo wir auf Elemente aus A referieren wollen, sprachlich aber besser auf die Elemente von B zugreifen können. Betrachten wir als Beispiel das folgende Bild einer injektiven Funktion $f\colon A \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Obwohl wir kaum in direkter Weise über die Elemente aus A reden können, geht dies problemlos unter Zuhilfenahme der Funktion f. Das „auf 1 abgebildete Element" beispielweise ist durch diese Beschreibung eindeutig charakterisiert. Beispiele dieser Art begegnen uns in vielen Zusammenhängen. Alle Definitionen, Beispiele, Lemmata und Sätze in diesem Buch sind mit einer Nummer versehen. Die Nummerierung liefert eine injektive Abbildung f von der Menge A der Definitionen, Beispiele, Lemmata und Sätze in die

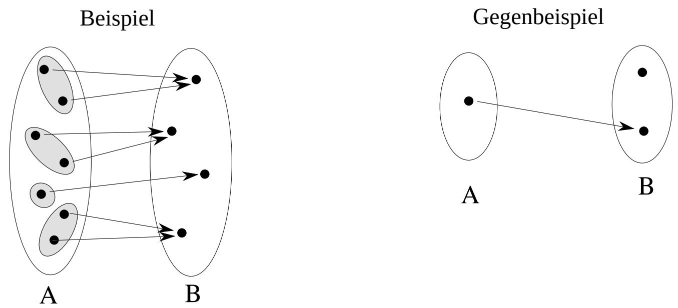


Abbildung 3.4: Surjektivität von Funktionen.

Menge B der in Frage kommenden Nummern. Wenn wir auf ein Element aus A referieren, etwa auf Lemma 3.22, so verwenden wir hierzu nicht das Element, sondern sein Bild unter f in B. Ein Nachteil ist, daß dasselbe Lemma in unterschiedlichen Büchern in aller Regel verschiedene Nummern trägt. Aus diesem Grund werden wirklich wichtige Prinzipien oft noch in anderer Weise benannt. Beispielsweise hatten wir den — allgemein üblichen — Namen „Extensionalitätsprinzip für Funktionen" für den in Lemma 3.39 dargestellten Sachverhalt eingeführt. Viele wichtige Sätze in der Mathematik sind nach ihren Entdecker benannt.

Definition 3.47 Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt *surjektiv* (oder Funktion von A *auf* B) genau dann, wenn jedes $b \in B$ als Bild unter f auftritt, das heißt, falls gilt

$$\forall b \in B\ \exists a \in A\colon f(a) = b.$$

Eine surjektive Funktion wird auch *Surjektion* genannt. Wenn es eine surjektive Funktion f von A auf B gibt, so bedeutet dies, daß man aus A mittels einer geeigneten „Verschmelzung" von Elementen eine Menge erhält, die ebensoviele Elemente wie B enthält. Hierzu identifiziert man genau diejenigen Elemente von A, die dasselbe Bild unter f haben. Abbildung 3.4 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Damit zusammenhängend wird deutlich, daß die Menge

$$\{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$$

eine Partition von A ist. Bezüglich der Zahl der Elemente von A und B gilt die folgende Aussage.

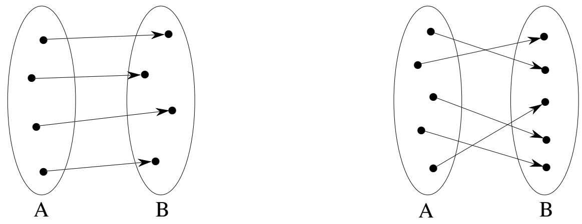


Abbildung 3.5: Beispiele bijektiver Funktionen.

Lemma 3.48 *Es seien A und B endliche Mengen. Gibt es eine surjektive Funktion $f\colon A \to B$, so folgt $|A| \geq |B|$. Die Umkehrung gilt ebenfalls.*

Definition 3.49 Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt *bijektiv* genau dann, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Eine bijektive Funktion wird auch *Bijektion* genannt. Eine Bijektion einer Menge M auf sich selbst wird auch *Permutation* von M genannt. Abbildung 3.5 verdeutlicht das Konzept der Bijektion. Der in Beispiel 3.34 Nr. 2 erwähnte „Korrespondenzgedanke“ begegnet uns hier in der reinsten Form, da bei bijektiven Funktionen die Korrespondenz *alle* Elemente des Bildbereichs miteinschließt.

Lemma 3.50 *Es seien A und B endliche Mengen. Gibt es eine bijektive Funktion $f\colon A \to B$, so folgt $|A| = |B|$. Die Umkehrung gilt ebenfalls.*

Beispiel 3.51 Sind bei einer Vorlesung alle Plätze besetzt (ohne daß sich zwei Zuhörer einen Platz teilen), so definiert die Sitzordnung eine Bijektion zwischen der Menge der Zuhörer und der Menge der Plätze.

Beispiel 3.52 Dieses Beispiel präzisiert die Argumentation im Beweis von Lemma 2.27. Es sei A eine nichtleere Menge und $a \in A$. Definieren wir $\mathcal{P}_1 := \{M \subseteq A \mid a \notin M\}$ und $\mathcal{P}_2 := \{M \subseteq A \mid a \in M\}$, so stellt die Abbildung $f\colon M \mapsto M \cup \{a\}$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ dar. In der Tat, aus $f(M_1) = f(M_2) = N$ folgt $M_1 = M_2 = N \setminus \{a\}$, woraus sich die Injektivität ergibt. Ist $N \in \mathcal{P}_2$ so gilt $N \setminus \{a\} \in \mathcal{P}_1$ und $f(N \setminus \{a\}) = N$, wodurch sich die Surjektivität ergibt. Aus Lemma 3.50 folgt nun im Fall, wo A endlich ist, daß $|\mathcal{P}_1| = |\mathcal{P}_2|$.

Die folgenden Lemmata stellen eine Verbindung her zwischen Injektivität und Surjektivität einerseits und den Aussagen (ii) und (iv) aus Lemma 3.40 andererseits:

Lemma 3.53 *Sei $A \neq \emptyset$ und $f\colon A \to B$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- *(i)* f *ist injektiv,*
- *(ii)* $\forall X, X' \subseteq A\colon f(X \cap X') = f(X) \cap f(X')$,
- *(iii)* f *besitzt ein Rechtsinverses, das heißt, es gibt eine Funktion* $g\colon B \to A$ *so daß* $f \circ g = Id_A$.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Sei f injektiv. Sind nun $X, X' \subseteq A$ so gilt nach Lemma 3.40 (ii) stets $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$. Es bleibt daher die umgekehrte Inklusion $f(X) \cap f(X') \subseteq f(X \cap X')$ zu zeigen. Sei $b \in f(X) \cap f(X')$. Dann gilt

$$\exists x \in X\colon b = f(x) \ \wedge\ \exists x' \in X'\colon b = f(x')$$

Da f injektiv ist, folgt $x = x' \in X \cap X'$ und somit $b \in f(X \cap X')$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“: Es gelte Eigenschaft (ii). Wir zeigen zunächst, daß f^{-1} eine Funktion ist. Dazu seien $\langle y, x_1 \rangle$ und $\langle y, x_2 \rangle$ in f^{-1}. Wir müssen $x_1 = x_2$ zeigen. Es sind $\langle x_1, y \rangle$ und $\langle x_2, y \rangle$ in f, nach Definition von f^{-1}. Wäre nun $x_1 \neq x_2$, so wäre $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ und wegen (ii) somit

$$\{y\} = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

was unmöglich ist. Daher ist tatsächlich $x_1 = x_2$. Somit ist f^{-1} eine Funktion. Es ist klar, daß $Def(f^{-1}) = f(A)$. Wir wählen nun irgendein $a \in A$, was geht, da $A \neq \emptyset$ nach Voraussetzung. Durch die Definition

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{für } y \in f(A) \\ a & \text{für } y \in B \setminus f(A) \end{cases}$$

erhalten wir die Funktion $g\colon B \to A$. Es sei $x \in A$ gegeben. Es gilt

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

damit ist (iii) gezeigt.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“: Wir nehmen an, daß es eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $(f \circ g)(x) = x$ für alle $x \in A$ gibt . Es seien $x_1, x_2 \in A$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Damit folgt $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_1 = x_2$. Somit ist f injektiv. ■

Der obige Beweis verwendet einen sogenannten *Ringschluß*: obwohl wir nur drei Richtungen gezeigt haben, folgt nun sofort, daß tatsächlich alle Aussagen äquivalent sind. Alle nicht explizit gezeigten Richtungen folgen wegen der Transitivität der Implikation.

Lemma 3.54 *Sei $f\colon A \to B$. Es ist f^{-1} eine Funktion genau dann, wenn f injektiv ist. In diesem Fall ist auch f^{-1} wieder injektiv, und jedes $a \in A$ tritt als Bild unter f^{-1} auf. Ist f außerdem surjektiv, so ist $f^{-1}\colon B \to A$ eine Bijektion und es gilt $f \circ f^{-1} = Id_A$ und $f^{-1} \circ f = Id_B$.*

Beweis. Übung. ∎

Lemma 3.55 *Es sei $f\colon A \to B$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) *f ist surjektiv,*

(*ii*) $\forall Y \subseteq B : f(f^{-1}(Y)) = Y$,

(*iii*) *f hat ein Linksinverses, das heißt, es gibt eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = Id_B$.*

Der Nachweis der Äquivalenz von (i) und (ii) wird als Übung empfohlen. Die Äquivalenz zu (iii) ist schwieriger[3], daher verzichten wir auf einen Beweis.

Lemma 3.56 *Es seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Funktionen.*

(i) Sind f und g injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.

(ii) Sind f und g surjektiv, so ist auch $f \circ g$ surjektiv.

(iii) Sind f und g bijektiv, so ist auch $f \circ g$ bijektiv und es gilt

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1},$$

(iv) Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g surjektiv und f injektiv.

Beweis. Übung. ∎

[3] Sie benötigt das sogenannte „Auswahlaxiom“.

3.6 Ergänzungen

Zum Schluß dieses Kapitels werden drei Themenbereiche angerissen, von denen die letzten beiden beim ersten Lesen auch überschlagen werden können. Im ersten Teil, der ungleich wichtiger ist, erläutern wir das Prinzip der (simultanen) induktiven Definition von Mengen, das wir bereits in Beispielen verwendet hatten. Da diese Form der Definition von Mengen gerade in der Informatik und Linguistik häufig auftritt, ist sie von großer Bedeutung. Im zweiten Teil zeigen wir, wie man mit Hilfe von Funktionen auch Teilmengen und Relationen beschreiben kann. Danach verwenden wir den Funktionsbegriff, um auch unendliche kartesische Produkte einzuführen.

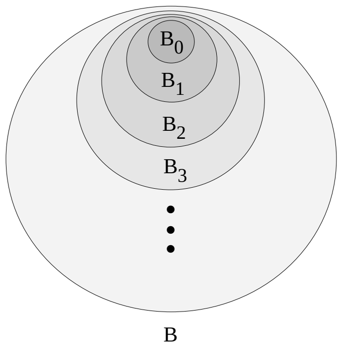
3.6.1 Induktive Definition von Mengen

Eine sogenannte *induktive Definition* einer Menge B besteht aus einer endlichen Menge von Regeln, wobei jede Regel entweder eine *Basisregel* ist oder eine *induktive Regel*.

- Eine Basisregel gibt an, daß bestimmte Elemente zu B gehören, oder daß eine bereits definierte und bekannte Menge Teilmenge von B ist.

- Eine induktive Regel hat als *Prämisse* eine endliche Zahl von Elementschaftsbedingungen, die besagen, daß bestimmte Elemente $b_1, \ldots, b_n$ zu B oder zu bekannten und vorgegebenen Mengen gehören sollen. Die *Konklusion* besagt, daß dann ein mit Hilfe der Elemente $b_1, \ldots, b_n$ zu definierendes Element b zu B gehört.

Die auf diese Weise definierte Menge B enthält genau diejenigen Elemente, deren Zugehörigkeit zu B durch endlich viele Anwendungen der Regeln verifiziert werden kann. Anschaulich kann man sich die Menge B mit Hilfe der folgenden Figur vorstellen:



Die Basisregeln definieren eine erste Teilmenge B_0 von B. Durch Anwenden der induktiven Regeln auf die bereits erhaltenen Elemente in B_0 und auf die Elemente der bekannten und vorgegebenen Mengen erhalten wir (in der Regel) neue Elemente. Durch Zusammenfassen von B_0 mit diesen neuen Elementen erhalten wir die Obermenge B_1. Durch Anwenden der induktiven Regeln auf die bereits erhaltenen Elemente in B_1 und auf die Elemente der bekannten und vorgegebenen Mengen erhalten wir (in der Regel) neue Elemente, die wir mit B_1 zur Obermenge B_2 zusammenfassen etc. Wenn wir diese Erweiterungsschritte unendlich oft wiederholen, erhalten wir schließlich die gesuchte Menge B als Zusammenfassung aller Mengen B_i $(i \in \mathbb{N})$.

Beispiel 3.57 Die Menge G der geraden natürlichen Zahlen kann induktiv etwa wie folgt definiert werden. Die einzige Basisregel sei

$$0 \in G.$$

Die einzige induktive Regel besagt

$$\text{Ist } n \in G, \text{ so ist auch } n + 2 \in G.$$

Eine Kurzschreibweise, die beide Regeln zusammenfaßt, ist

$$G \ ::= \ 0 \mid G + 2.$$

Im obigen Bild erhalten wir zunächst die „Basismenge“ $G_0 = \{0\}$. Im nächsten Schritt ergibt sich $G_1 = G_0 \cup \{g + 2 \mid g \in G_0\} = \{0, 2\}$. Hierbei repräsentiert G_0 die zu diesem Zeitpunkt bereits erhaltene Teilmenge von G, die Menge $\{g+2 \mid g \in G_0\}$ stellt die Menge derjenigen Elemente dar, die sich durch Anwenden der induktiven Regel auf die bisherigen Elemente ergeben. Im dritten Schritt erhalten wir analog $G_2 = G_1 \cup \{g+2 \mid g \in G_1\} = \{0, 2, 4\}$ etc. Durch Vereinigen aller so konstruierbaren Mengen $G_0, G_1, G_2, \ldots$ erhalten wir die gesuchte Menge G.

Beispiel 3.58 Es sei A eine Menge. Dann kann die in Definition 3.9 eingeführte Menge A^* aller Wörter über A wie folgt induktiv definiert werden.

(1) Das leere Wort „ϵ" gehört zu A^*.

(2) Ist $w \in A^*$ und $a \in A$, so ist auch $w \circ a \in A^*$

Hierbei ist (1) Basisregel, (2) eine induktive Regel, „$\circ$" steht für die in Beispiel 3.34 Nr. 5 definierte Konkatenation. Dieselbe Definition in Kurzschreibweise wäre

$$A^* \ ::= \ \epsilon \mid A^* \circ A.$$

Im obigen Bild erhalten wir hier zunächst die Basismenge $\{\epsilon\} = A^0$. Im nächsten Schritt ergibt sich $A^0 \cup \{w \circ a \mid w \in \{\epsilon\}, a \in A\} = A^0 \cup A^1$. Hierbei repräsentiert $\{\epsilon\} = A^0$ die zu diesem Zeitpunkt bereits erhaltene Teilmenge von A^*, die Menge $\{w \circ a \mid w \in \{\epsilon\}, a \in A\}$ stellt die Menge derjenigen Elemente dar, die sich durch Anwenden der induktiven Regel auf die bisherigen Elemente ergeben. Im dritten Schritt erhalten wir analog $A^0 \cup A^1 \cup A^2$ etc. Durch Vereinigen aller so konstruierbaren Mengen erhalten wir die gesuchte Menge A^*.

Die Idee der induktiven Definition von Mengen läßt sich noch etwas verallgemeinern. Eine *simultane induktive Definition* einer endlichen Familie $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ von Mengen besteht aus einer endlichen Menge von Regeln. Jede Regel ist entweder eine *Basisregel* oder eine *induktive Regel.* Eine Basisregel gibt an, daß bestimmte Elemente zu einer Menge A_i gehören. Eine induktive Regel hat als *Prämisse* eine endliche Zahl von Elementschaftsbedingungen, die besagen, daß bestimmte Elemente zu vorgegebenen Mengen aus $\mathcal{A}$ gehören sollen. Die *Konklusion* besagt, daß dann ein daraus abzuleitendes Element zu einer bestimmten Menge A_i gehört. Ein Element gehört zu einer der auf diese Weise definierten Mengen A_i genau dann, falls man dies durch endlich viele Anwendungen der Regeln verifizieren kann.

Beispiel 3.59 Die folgenden Regeln stellen eine simultane induktive Definition der Menge G der geraden natürlichen Zahlen und der Menge U der ungeraden natürlichen Zahlen dar:

(1) $0 \in G$,

(2) $1 \in U$,

(3) $n + m \in G$ falls $n \in G$ und $m \in G$,

(4) $n + m \in G$ falls $n \in U$ und $m \in U$,

(5) $n + m \in U$ falls $n \in U$ und $m \in G$.

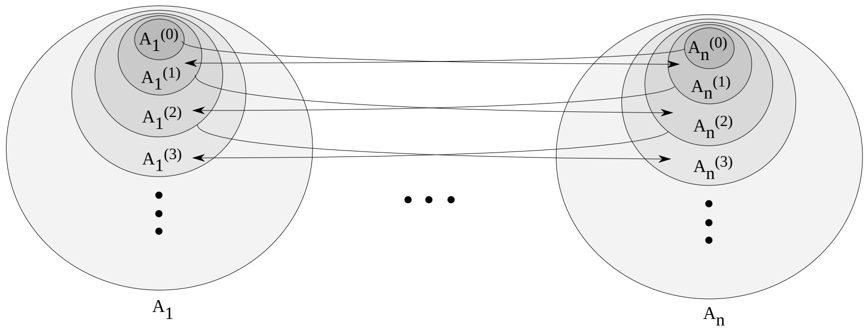


Abbildung 3.6: Illustration zur simultanen induktiven Definition von Mengen $A_1, \ldots, A_n$.

Die Kurzschreibweise ist hier

$$\begin{array}{lcl} G & ::= & 0 \mid G+G \mid U+U, \\ U & ::= & 1 \mid G+U. \end{array}$$

Man kann die durch eine simultane induktive Definition beschriebenen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ wie im Fall der einfachen induktiven Definition durch eine *Turm-* oder *Limeskonstruktion* expliziter beschreiben. Dazu setzt man in einem ersten Schritt $A_i^{(0)}$ als Menge derjenigen Elemente fest, die aufgrund der gegebenen Basisregeln zu A_i gehören müssen ($1 \leq i \leq n$). Sind nun für ein $k \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq n$ die Mengen $A_i^{(k)}$ bereits definiert, so setzen wir $A_i^{(k+1)}$ als die Vereinigung von $A_i^{(k)}$ mit der Menge derjenigen Elemente fest, die sich durch Anwendung der induktiven Regeln auf Elemente in den Mengen $A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}$ ergeben. Dies ist in Abbildung 3.6 illustriert. Offenkundig ist für jedes $1 \leq i \leq n$ die Folge

$$A_i^{(0)} \subseteq A_i^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq A_i^{(k)} \subseteq A_i^{(k+1)} \subseteq \cdots$$

in der Tat ein aufsteigender Turm von Mengen. Es ist dann $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_i^{(k)}$ die gesuchte Menge A_i, für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 3.60 Die Limeskonstruktion zu der in Beispiel 3.59 gegebenen simultanen induktiven Definition der Mengen G und U der geraden und ungeraden natürlichen Zahlen stellt sich wie folgt dar.

$$G_0 = \{0\},$$

$$
\begin{array}{lcl}
U_0 & = & \{1\}, \\
G_1 & = & G_0 \cup \{n+m \mid n,m \in G_0\} \cup \{n+m \mid n,m \in U_0\} = \{0,2\}, \\
U_1 & = & U_0 \cup \{n+m \mid n \in U_0, m \in G_0\} = \{1\}, \\
G_2 & = & G_1 \cup \{n+m \mid n,m \in G_1\} \cup \{n+m \mid n,m \in U_1\} = \{0,2,4\}, \\
U_2 & = & U_1 \cup \{n+m \mid n \in U_1, m \in G_1\} = \{1,3\}, \\
G_3 & = & G_2 \cup \{n+m \mid n,m \in G_2\} \cup \{n+m \mid n,m \in U_2\} = \{0,2,\ldots,8\}, \\
U_3 & = & U_2 \cup \{n+m \mid n \in U_2, m \in G_2\} = \{1,3,\ldots,7\}, \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Offenkundig ist dann $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i = G$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = U$.

3.6.2 Charakteristische Funktionen und höhere Funktionen

An dieser Stelle wollen wir nochmal zur Schreibweise 2^M für die Potenzmenge von M zurückkehren. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ enthält genau alle Teilmengen von M als Elemente. Nun läßt sich eine Teilmenge N von M eindeutig dadurch charakterisieren, daß man für jedes $m \in M$ angibt, ob $m \in N$ gilt (1) oder nicht (0). Eine solche Beschreibung liefert die *charakteristische Funktion* $\chi_N \colon M \to \{0,1\}$ mit

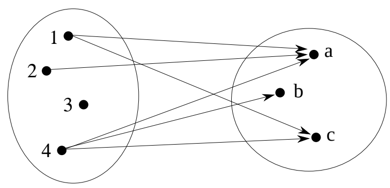
$$\chi_N(m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht sofort, daß die Abbildung $N \mapsto \chi_N$ eine Bijektion von $\mathcal{P}(M)$ auf die Menge $\{0,1\}^M$ aller Abbildungen von M nach $\{0,1\}$ ist. Die Natürlichkeit dieser Bijektion erlaubt es, die beiden Mengen zu „identifizieren“, was wir durch die symbolische Gleichung $\mathcal{P}(M) = \{0,1\}^M$ andeuten wollen. Machen wir nun von der in der Mengenlehre üblichen Konvention Gebrauch, die Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch $\{0,1,\ldots,n-1\}$ zu kodieren, so können wir für $\mathcal{P}(M) = \{0,1\}^M$ auch 2^M schreiben.

Ganz allgemein wird jede Funktion $\chi \colon M \to \{0,1\}$ als *charakteristische Funktion* auf M bezeichnet. Mit Hilfe charakteristischer Funktionen lassen sich beliebige Relationen adäquat durch komplexe Funktionen repräsentieren. Nehmen wir zur Illustration die Relation aus Beispiel 3.15:

$$
\left[\begin{array}{lll}
1 & \longmapsto & \left[\begin{array}{lll} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 0 \\ c & \mapsto & 1 \end{array}\right] \\[2ex]
2 & \longmapsto & \left[\begin{array}{lll} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 0 \\ c & \mapsto & 0 \end{array}\right] \\[2ex]
3 & \longmapsto & \left[\begin{array}{lll} a & \mapsto & 0 \\ b & \mapsto & 0 \\ c & \mapsto & 0 \end{array}\right] \\[2ex]
4 & \longmapsto & \left[\begin{array}{lll} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 1 \\ c & \mapsto & 1 \end{array}\right]
\end{array}\right]
$$

Abbildung 3.7: Funktionale Darstellung von Relationen.



Für jedes $x \in \{1,2,3,4\}$ ist $R(\{x\})$, also das Bild von $\{x\}$ unter R, eine Teilmenge von $\{a,b,c\}$. Wenn wir für jedes $x \in \{1,2,3,4\}$ diese Teilmenge $R(\{x\})$ kennen, so kennen wir umgekehrt auch R. Indem wir nun wieder Teilmengen durch charakteristische Funktionen ersetzen, erhalten wir die in Abbildung 3.7 dargestellte Repräsentation von R, die nur auf Funktionen basiert: Man kann natürlich diese funktionale Darstellung als Variante der in Beispiel 3.15 angegebenen Matrixdarstellung auffassen.

Ganz analog läßt sich jede Relation $R \subseteq A \times B$ in eine Funktion

$$F_R\colon A \to (2^B)\colon F_R(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{die Funktion } \chi_x\colon B \to \{0,1\} \\ \text{mit } \chi_x(b) = 1 \text{ gdw. } R(x,b). \end{array} \right.$$

übersetzen. Die Funktionen F_R zeigen, daß der Bildbereich einer Funktion wiederum selbst aus Funktionen bestehen kann. Diese „Verschachtelung“

von Funktionen kann beliebig weiter getrieben werden. Man kann zum Beispiel auch jede n-stellige Funktion auf einer Menge B (vgl. Definition 3.31) durch eine Verschachtelung von „einfachen“ Funktionen (wo alle Argumente einfache Elemente sind) repräsentieren. Auch dieser technische Trick, der manchmal als „Currying[4]“ bezeichnet wird, sei anhand eines kleinen Beispiels illustriert. Es sei f die folgende zweistellige Funktion auf $\{a, b\}$:

$$f := \begin{bmatrix} \langle a,a\rangle & \mapsto & a \\ \langle a,b\rangle & \mapsto & a \\ \langle b,a\rangle & \mapsto & a \\ \langle b,b\rangle & \mapsto & b \end{bmatrix}$$

Dann kann f auch in der folgenden Weise kodiert werden:

$$\begin{bmatrix} a & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & a \end{bmatrix} \\ & & \\ b & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & b \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

3.6.3 Unendliche kartesische Produkte

Erinnern wir uns, daß es uns bei der Definition des geordneten n-Tupels im wesentlichen darum ging, eine Reihenfolge zwischen Elementen fixieren zu können. Anstatt n-Tupel zu verwenden, kann man die Reihenfolge der Elemente auch explizit mit Hilfe von Funktionen festhalten, die auf „Anfangsabschnitten“ von $\mathbb{N}$ der Form $\{0, \ldots, n-1\}$ definiert sind. Die Funktion f der Form

$$\begin{bmatrix} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto d \\ 2 \mapsto b \\ 3 \mapsto a \end{bmatrix}$$

beispielsweise entspricht gerade dem Viertupel $\langle a, d, b, a\rangle$ beziehungsweise dem Wort *adba*. Ein kartesisches Produkt $A \times B \times C \times D$ kann auch durch die Menge

$$\{f \in (A \cup B \cup C \cup D)^{\{0,1,2,3\}} \mid f(0) \in A, f(1) \in B, f(2) \in C, f(3) \in D\}$$

[4]Nach dem Logiker H.B. Curry.

beschrieben werden. Im folgenden werden wir in beiden Fällen nur noch von kartesischen Produkten reden. Der springende Punkt ist, daß Produkte, die auf Funktionen beruhen, leicht auf Produkte mit unendlich vielen Faktoren verallgemeinert werden können. So beschreibt etwa

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i := \{f\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \mid f(i) \in A_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}\}$$

die Menge aller unendlichen Folgen, deren i–tes Element aus A_i kommt ($i \in \mathbb{N}$). Für $A_i = A$ ($i \in \mathbb{N}$) erhalten wir $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i = A^{\mathbb{N}}$. Allgemeiner kann man für beliebigen nichtleeren Indexbereich I und Mengen A_i das Produkt

$$\prod_{i \in I} A_i := \{f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \quad \text{für alle } i \in I\}$$

einführen.

3.7 Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgaben zu Teilkapitel 3.1

Aufgabe 3.1 Würde Lemma 3.2 (ii) richtig bleiben, wenn man das geordnete Paar $\langle a, b\rangle$ in der Form $\langle a, b\rangle := \{a, \{b\}\}$ definieren würde? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3.2 Es sei $A_i = \emptyset$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wie sieht $\prod_{i=1,\ldots,n} A_i$ aus?

Aufgabe 3.3 Es sei $A := \{a_1, a_2\}$, $B := \{0, 1\}$ und $C := \{0, a_2, c\}$.

1. Berechnen Sie B^3.
2. Geben Sie $A \times B \times C$ an.

Aufgabe 3.4 Aus dem kartesischen Produkt $A \times B$ haben wir vier Elemente herausgenommen und erhalten $\{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$. Welche Elemente haben wir herausgenommen?

Aufgabe 3.5 Es seien A und B endliche Mengen. Wieviele Elemente hat die kleinste Teilmenge von $A \times B$, aus der wir A, B und damit $A \times B$ rekonstruieren können?

Aufgabe 3.6 Gilt für beliebige Mengen stets $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3.7 Beweisen Sie, daß für beliebige Mengen A, B und C stets

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

gilt.

Aufgabe 3.8 Es sei A das Alphabet mit den Symbolen a, b, c. Geben Sie fünf Beispiele für unendliche formale Sprachen über A an.

Aufgaben zu Teilkapitel 3.2

Aufgabe 3.9 Es sei A die Menge $\{1, 2\}$. Geben Sie alle zweistellige Relationen auf A an.

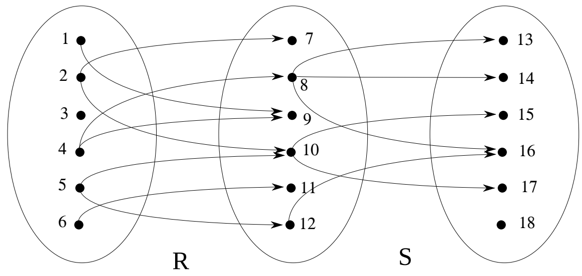
Aufgabe 3.10 Es sei A eine Menge mit n Elementen und $m \geq 1$. Wieviel m-stellige Relationen auf A gibt es?

Aufgabe 3.11 Es sei R die in Beispiel 3.18 Nr. 1 abgebildete Relation. Geben Sie $R(\{2, 3, 4\})$, $R(\{1, 4\})$, $R(\{1, 3\})$ sowie $R\lceil\{1, 2, 4\}$ und $R\lceil\{1, 3\}$ an.

Aufgabe 3.12 Es seien A, B endlich und $R, S \subseteq A \times B$. Wie ergibt sich die Matrixdarstellung von $R \cup S$ (resp. $R \cap S$) aus der Matrixdarstellung von R und S?

Aufgaben zu Teilkapitel 3.3

Aufgabe 3.13 Es seien R und S die nachfolgend abgebildeten Relationen. Berechnen Sie $R \circ S$, $(R \circ S)(\{2, 5, 6\})$, $(R \circ S)^{-1}(\{16, 17\})$.



Aufgabe 3.14 Gegeben seien die Relationen $R = \{\langle 0,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,6\rangle\}$ und $S := \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,0\rangle\}$ auf $\mathbb{N}$. Berechnen Sie R^{-1}, S^{-1}, $R \circ S$, $S \circ R$ und $R^{-1} \circ S^{-1}$. Was fällt beim Vergleich $S \circ R$ und $R^{-1} \circ S^{-1}$ auf?

Aufgabe 3.15 Es sei R eine zweistellige Relation auf der Menge A. Unter welcher Bedingung gilt dann $R = R^{-1}$? Was kann man über A sagen, wenn jede zweistellige Relation R auf A stets $R = R^{-1}$ erfüllt?

Aufgabe 3.16 Beweisen Sie die Teile 1 und 3 aus Lemma 3.22.

Aufgabe 3.17 Es seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen. Was gilt: $(R \circ S)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ oder $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$? Beweisen Sie die richtige Identität.

Aufgabe 3.18 Es sei A eine Menge mit k Elementen und $R, S \subseteq A \times A$. Es gelte $R \circ S = \emptyset$. Wieviel Elemente kann $R \cup S$ maximal haben?

Aufgabe 3.19 Beweisen Sie Lemma 3.26.

Aufgaben zu Teilkapitel 3.4

Aufgabe 3.20 Es seien A, B endliche Mengen und $f \subseteq A \times B$. Wie kann man an der Matrixdarstellung von f ablesen, ob f eine Funktion ist?

Aufgabe 3.21 Zeigen Sie, daß kartesische Produkte und zugehörige Projektionsfunktionen (vgl. Bsp. 3.34 Nr. 9) sich durch die folgende Universalitätseigenschaft auszeichnen: ist M eine Menge, und sind Funktionen

f_i: $M \to A_i$ für $1 \leq i \leq n$ vorgegeben, so gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion g: $M \to \Pi_{i=1}^n A_i$, so daß $f_i = g \circ \pi_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.

Aufgabe 3.22 Beweisen Sie Lemma 3.33 mittels vollständiger Induktion über die Zahl n der Elemente von A. Hinweis: es gibt genau eine Abbildung der leeren Menge in die Menge B, nämlich die „leere“ Abbildung $\emptyset$.

Aufgabe 3.23 Es sei $A := \{1, 2, 3\}, B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und f: $A \to B$ die Abbildung $x \mapsto 2x$. Berechnen Sie die Mengen $f(\emptyset)$, $f(\{1, 2\})$, $f^{-1}(\{2, 6, 8\})$, $f\lceil\{1, 3\}$, $(f\lceil\{1, 3\})^{-1}(\{2, 4, 8\})$.

Aufgabe 3.24 Beweisen Sie Lemma 3.40 (i). Hilfe: Sie können hier die Struktur des Beweises von Lemma 3.5 (ii) übernehmen.

Aufgabe 3.25 Geben Sie passende Beispiele an, die zeigen, daß in Lemma 3.40 (iii) und (iv) im allgemeinen die umgekehrte Inklusion nicht richtig ist.

Aufgaben zu Teilkapitel 3.5

Aufgabe 3.26 A und B seien Mengen und f: $A \to B$ sowie g: $B \to A$ Funktionen. Zeigen Sie: falls $f \circ g = Id_A$ und $g \circ f = Id_B$, so sind f und g bijektiv und es gilt $f = g^{-1}$ sowie $g = f^{-1}$.

Aufgabe 3.27 Verwenden Sie das Taubenloch-Prinzip (vgl. Lemma 3.44), um folgendes zu zeigen: es sei P eine Menge von mindestens 2 Personen. Dann gibt es zumindest zwei Personen in P, die dieselbe Zahl von anderen Personen aus P kennen. Hierbei sei vorausgesetzt, daß stets Person b Person a kennt, falls Person a Person b kennt $(a, b \in P)$.

Aufgabe 3.28 Es sei f: $A \to B$ eine surjektive Funktion. Zeigen Sie, daß die Menge $\{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$ eine Partition der Menge A bildet.

Aufgabe 3.29 Beweisen Sie Lemma 3.54.

Aufgabe 3.30 Es seien A, B endlich und f: $A \to B$. Wie kann man an der Matrixdarstellung von f ablesen, ob f injektiv (resp. surjektiv, bijektiv) ist?

Aufgaben zu Teilkapitel 3.6

Aufgabe 3.31 Für $i = 0, 1, 2$ sei M_i die Menge aller natürlichen Zahlen, die beim Teilen durch 3 den Rest i lassen. Zum Beispiel enthält M_1 die Zahlen $1, 4, 7, 10$ etc. Geben Sie eine simultane induktive Definition der Mengen M_1, M_2, M_3, wobei Sie nur die Zahlen 0 und 1 und das Additionszeichen „+" verwenden.

Aufgabe 3.32 Wenn man geordnete n-Tupel und kartesische Produkte so elegant mit Funktionen beschreiben kann (vgl. Abschnitt 3.6.3), warum haben wir überhaupt erst den Begriff des kartesischen Produktes eingeführt?

3.8 Bibliographische Angaben

Wie im vorigen Kapitel verweisen wir auf [Big89, Bra88, FS91, Ger72, RW92, uLW74] zur begleitenden Lektüre. Eine mathematisch anspruchsvolle Diskussion von Relationen und ihren Eigenschaften bietet [SS93]. Der Inhalt dieses Buches ist auch für Kapitel 7 interessant.