

Reinhard Weiß

Optik für die Fotografie

—

Strahlengang in optischen Instrumenten

10.03.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Optik für die Fotografie	3
1.1	Bildkonstruktion – Gauß’sche Linsengleichung	3
1.2	Lichtstärke eines Objektivs	6
1.3	Auflösungsvermögen eines Objektivs	7
2	Strahlengang in optischen Instrumenten	9
2.1	Nahlupe	11
2.2	Mikroskop	14
2.3	Kepler’sches Fernrohr	16
2.4	Zerstreuungslinse	18
2.5	Galilei’sches Fernrohr	19

1 Optik für die Fotografie

Im Folgenden diskutieren wir die für die fotografische Praxis wichtigsten Zusammenhänge aus der Optik. Die klassische Optik umfasst zwei Teilgebiete:

1. Die **geometrische Optik** bzw. Strahlenoptik befasst sich im Wesentlichen mit den physikalischen Phänomenen Reflexion und Brechung.
2. Die **Wellenoptik** befasst sich im Wesentlichen mit den physikalischen Phänomenen Beugung, Interferenz und Polarisation.

Man kann Licht als Feld elektromagnetischer Wellen beschreiben. Das Wellenlängenspektrum des sichtbaren Lichts erstreckt sich

von 390 nm (violett) bis 780 nm (dunkelrot) .

Eine Fotokamera besteht im Wesentlichen aus Objektiv, Blende und Film bzw. CCD¹ und entspricht in Aufbau und Funktion prinzipiell dem menschlichen Auge (Linse, Irisblende, Netzhaut). Das Objektiv entspricht einer Sammellinse, die durch Brechung des von einem Gegenstand emittierten Lichtes ein reelles Bild erzeugt. Dieses Bild wird auf dem Film aufgezeichnet oder mit Hilfe des CCD auf einem Datenträger abgespeichert.

1.1 Bildkonstruktion – Gauß'sche Linsengleichung

Bei der Sammellinse benötigt man zur Konstruktion des reellen Bildes folgende geometrische Elemente:

1. **Hauptebene**
Die Ebene senkrecht zur optischen Achse durch den Mittelpunkt einer (dünnen) Linse heißt Hauptebene.
2. **Optische Achse**
Die optische Achse verläuft – senkrecht zur Hauptebene – durch den Mittelpunkt der Linse.
3. **Zentralstrahl** (auch Haupt- oder Mittelpunktstrahl genannt)
Zentralstrahlen verlaufen ohne Richtungsänderung durch den Mittelpunkt der Linse.
4. **Parallelstrahl**
Parallelstrahlen verlaufen vor der Linse parallel zur optischen Achse und hinter der Linse immer durch den Brennpunkt.
5. **Brennpunktstrahl** (Verlaufsumkehrung des Parallelstrahls)
Brennpunktstrahlen verlaufen immer durch den vorderen Brennpunkt der Linse und hinter der Linse parallel zur optischen Achse.

¹CCD ist das Kürzel für den englischen Begriff *charge-coupled device* und bedeutet deutsch *ladungsgekoppeltes Bauteil*.

Mathematisch lässt sich die Bildentstehung hinter einer Sammellinse näherungsweise durch die folgende Abbildungsgleichung für dünne Linsen (auch **Gauß'sche Linsengleichung** genannt) beschreiben:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} . \quad (1)$$

Die **Brennweite** f der Linse und die **Gegenstandsweite** g sind meistens vorgegeben, die **Bildweite** b soll also ermittelt werden. Aus der Abbildungsgleichung erhält man durch Äquivalenzumformung

$$b = \frac{g \cdot f}{g - f} . \quad (2)$$

Deshalb muss beim Fokussieren auf einen Gegenstand die Bildweite b , also der entsprechende Abstand zwischen Linsen- bzw. Objektivenebene und der Bildebene, möglichst exakt eingestellt werden, um ein „scharfes“ Bild zu erhalten.

Wie man der Abbildung 1 entnehmen kann, erfolgt die Herleitung der Abbildungsgleichung mit Hilfe des Strahlensatzes, dabei wird die **Gegenstandsgröße** mit G und die **Bildgröße** mit B bezeichnet:

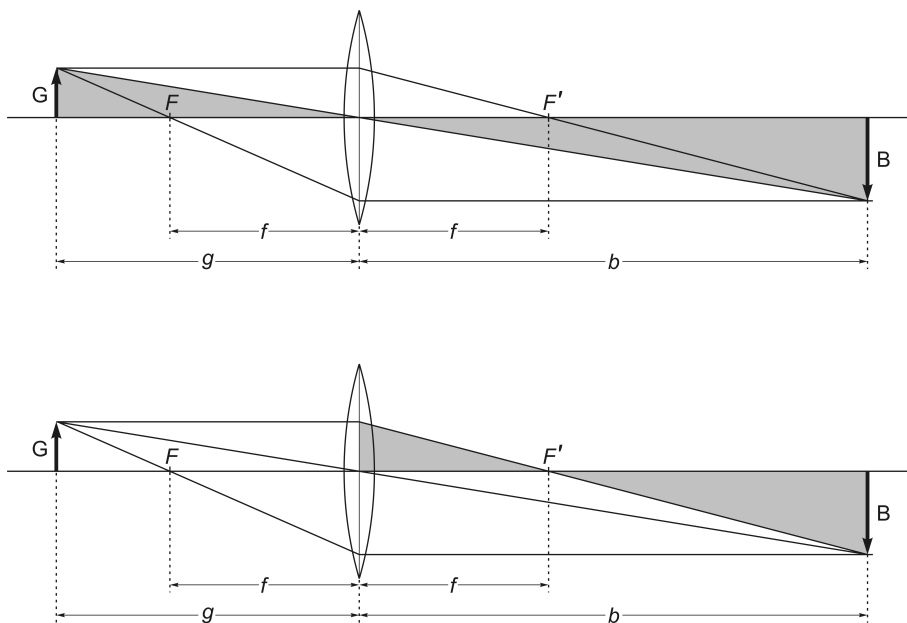


Abb. 1 Zur Herleitung der Gauß'schen Linsengleichung.

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} = \frac{b}{f} - \frac{f}{f} = \frac{b}{f} - 1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{g} = \frac{b}{f} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{f} = \frac{b}{g} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} . \quad \square$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergeben sich zwei Spezialfälle bezüglich des Verhältnisses von Gegenstandsgröße zu Bildgröße und von Gegenstandsweite zu Bildweite:

1. Es sei $g = 2f$. Einsetzen in (2) liefert

$$b = \frac{2f \cdot f}{2f - f} = \frac{f \cdot 2f}{f \cdot (2 - 1)} = \frac{2f}{1} = 2f.$$

Das heißt, wenn sich ein Gegenstand im Abstand der doppelten Brennweite befindet, entsteht sein Bild ebenfalls im Abstand der doppelten Brennweite und wegen $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ ist die Bildgröße gleich der Gegenstandsgröße:

$$g = b = 2f \quad \Rightarrow \quad G = B.$$

2. Es sei $g = f$, d. h. der Gegenstand befinde sich in der vorderen Brennebene der Linse. Dann folgt aus (2)

$$b = \frac{f \cdot f}{f - f} = \frac{f^2}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{g \rightarrow f} b = \infty.$$

Jeder in der vorderen Brennebene gelegene Gegenstandspunkt wird im Unendlichen hinter der Linse abgebildet, weil der Strahlenverlauf hinter der Linse parallel ist. Dieser Sachverhalt gilt natürlich auch in seiner Umkehrung für einen unendlich weit entfernten Gegenstand, also für $g \rightarrow \infty$. Es wird dann jeder Gegenstandspunkt in der hinteren Brennebene der Linse abgebildet.

Diese Zusammenhänge werden in der Abbildung 2 veranschaulicht.

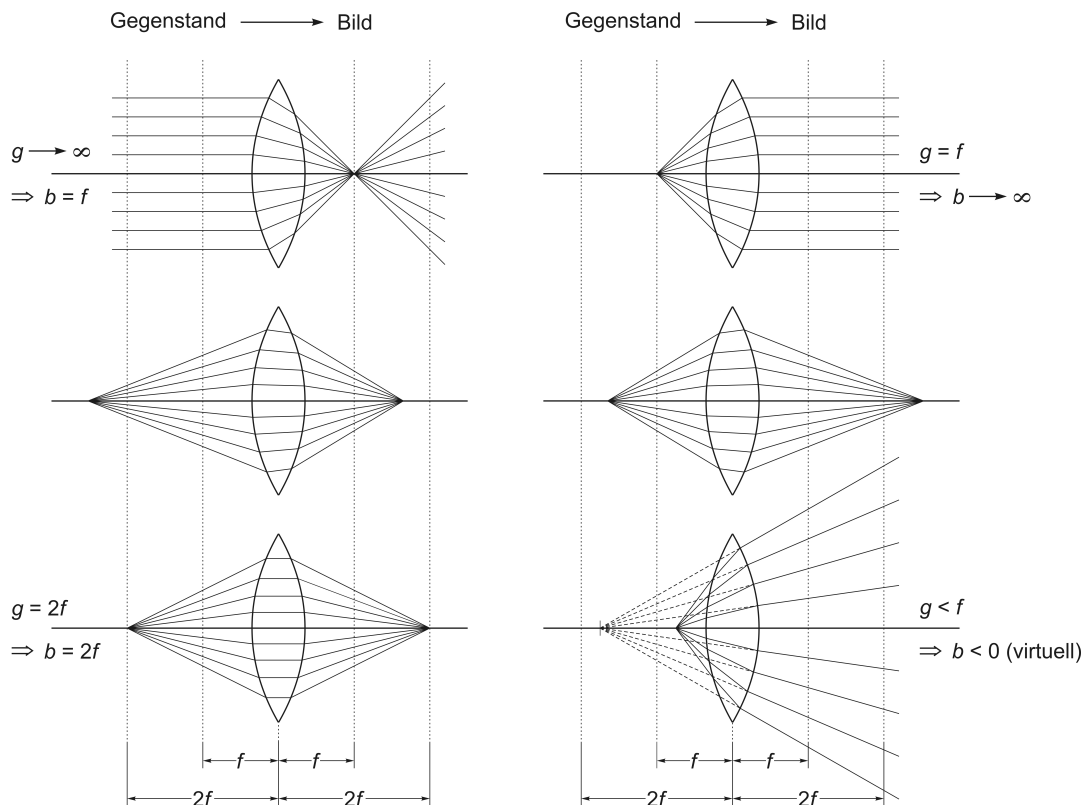


Abb. 2 Die Abbildung eines auf der optischen Achse gelegenen Punktes (Gegenstandes) für verschiedene Gegenstandsweiten g .

1.2 Lichtstärke eines Objektivs

Die Fläche der Abbildung, resultierend aus dem Filmformat, bzw. der Flächeninhalt des Sensors in der Kamera sind konstante Größen. Variabel ist man in der Anwendung verschiedener Objektivs, die im Wesentlichen durch ihre Brennweite f und ihre **maximale Eintrittspupille** mit Durchmesser D (entspricht dem Objektivdurchmesser) charakterisiert werden. Es gilt:

Je größer die Eintrittspupille, desto größer die „Objektlichtmenge“, die das Objektiv auf den Sensor fokussiert.

Die Lichtstärke eines Objektivs wird durch sein **maximales Öffnungsverhältnis** beschrieben:

$$\text{maximales Öffnungsverhältnis} = \frac{D}{f}. \quad (4)$$

Je größer der Durchmesser eines Objektivs bei gleicher Brennweite ist, desto größer sind sein maximales Öffnungsverhältnis und seine Lichtstärke. Beispielsweise hat ein Objektiv mit der Brennweite $f = 50$ mm und einer maximalen Eintrittspupillenweite (Objektivdurchmesser) von $D = 25$ mm ein maximales Öffnungsverhältnis von $\frac{D}{f} = 0,5$. Beträgt bei gleicher Brennweite die maximale Eintrittspupillenweite nur die Hälfte, also 12,5 mm, so halbiert sich auch das maximale Öffnungsverhältnis (die Lichtstärke des Objektivs) auf 0,25.

Bei einem maximalen Öffnungsverhältnis von 1 ist der Objektivdurchmesser gleich der Brennweite. Da Öffnungsverhältnisse von ≥ 1 kaum realisiert werden, sind die Öffnungsverhältnisse meistens wenig praktikable Dezimalbrüche. Deshalb verwendet man in der Praxis allgemein den Kehrwert des Öffnungsverhältnisses bzw. die **Blendenzahl** k , kurz die Blende:

$$\text{Blendenzahl } k = \frac{f}{D}. \quad (5)$$

Die oben aufgeführten Beispiele erhalten damit die folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{Blendenzahl } k = 2 & \Leftrightarrow \text{Öffnungsverhältnis } \frac{1}{k} = 1 : k = 1 : 2 = 0,5, \\ \text{Blendenzahl } k = 4 & \Leftrightarrow \text{Öffnungsverhältnis } \frac{1}{k} = 1 : k = 1 : 4 = 0,25. \end{aligned}$$

Die Angabe $1 : k$ in den technischen Daten eines Objektivs ist also ein Maß für seine Lichtstärke. Je kleiner die Blendenzahl k , desto größer ist die Lichtstärke. Mit der Irisblende (kurz Blende) im Innern des Objektivs lässt sich die Eintrittspupille verkleinern. Diesen Vorgang nennt man Abblenden. Daraus ergeben sich kleinere Öffnungsverhältnisse bzw. größere Blendenzahlen. Durch das Abblenden wird die auf den Sensor fokussierte „Lichtmenge“ reduziert, wodurch bei zu hellen Objekten eine sog. Überbelichtung vermieden werden kann. Außerdem wird durch das Abblenden die Schärfentiefe vergrößert. Allerdings lässt sich die Schärfentiefe, falls erwünscht, nicht unbegrenzt durch Abblenden vergrößern. Ab einer bestimmten Blende wird die auf den Sensor fallende „Lichtmenge“ so gering, dass die Lichtempfindlichkeit des Sensors für eine zufriedenstellende Bilderzeugung nicht mehr ausreicht. In diesem Fall spricht man von Unterbelichtung.

1.3 Auflösungsvermögen eines Objektivs

Das Auflösungsvermögen wird bestimmt durch den Sinus des Winkels θ_{\min} , unter dem zwei benachbarte Objekte (z. B. Punkte oder Linien) gerade noch voneinander getrennt abgebildet oder wahrgenommen werden. Beugung und Interferenz bilden die Grundlage zur Herleitung der Formel²

$$\sin(\theta_{\min}) = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

zur Berechnung des Auflösungsvermögens eines Objektivs bei *runder Eintrittsöffnung* bzw. maximaler Eintrittspupille mit dem Durchmesser D . Wie man sieht, wird das Auflösungsvermögen nicht nur durch den Objektivdurchmesser physikalisch begrenzt (je kleiner D , desto größer θ_{\min} und desto schlechter das Auflösungsvermögen), sondern auch durch die Wellenlänge λ des Lichtes.

Beispiel CCD-Kompaktkamera :

Objektivbrennweite $f = 25 \text{ mm} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$,

Objektivlichtstärke $1 : k = 1 : 1,8 \Rightarrow k = 1,8$,

CCD mit 1280×1024 Pixeln bei einer Größe von $6,4 \text{ mm} \times 4,8 \text{ mm} = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \times 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ entsprechend einer Diagonalen von $1/2'' \approx 8 \text{ mm}$,

grünes Licht entsprechend $\lambda = 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Mit (5) erhalten wir den Objektivdurchmesser

$$D = \frac{f}{k} = \frac{25 \text{ mm}}{1,8} = 13,9 \text{ mm} ,$$

$$D = 1,39 \cdot 10^{-2} \text{ m} .$$

Mit D können wir jetzt das Auflösungsvermögen des Objektivs für grünes Licht berechnen:

$$\sin(\theta_{\min}) = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,39 \cdot 10^{-2} \text{ m}} ,$$

$$\sin(\theta_{\min}) = 4,39 \cdot 10^{-5} .$$

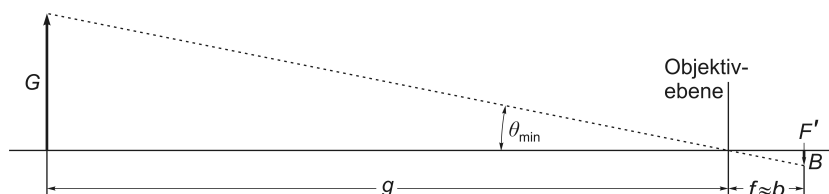


Abb. 3 Um B bequem darstellen zu können, wurde θ_{\min} stark übertrieben groß gewählt. In der Realität wäre der Winkel θ_{\min} deutlich kleiner als 1° .

Ein Gegenstand, der im Abstand $g = 1 \text{ m}$ unter dem Winkel θ_{\min} beobachtet wird (s. Abb. 3), besitzt bei *kleinem* Winkel θ_{\min} die Größe

$$G \approx g \cdot \sin(\theta_{\min}) = 1 \text{ m} \cdot 4,39 \cdot 10^{-5} = 4,39 \cdot 10^{-5} \text{ m} ,$$

²Diese Formel wird hergeleitet im Kapitel *Fraunhofer-Beugung an kreisrunder Öffnung – Auflösungsvermögen* in meinem Skript *Ausgewählte Themen und Herleitungen aus dem Grundstudium*.

$$G \approx 43,9 \mu\text{m} .$$

Das reelle Bild von G entsteht für $g \gg f$ näherungsweise in der hinteren Brennebene des Objektivs (s. Abb. 3). Folglich gilt für die Bildgröße

$$B \approx b \cdot \sin(\theta_{\min}) \approx f \cdot \sin(\theta_{\min}) = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 4,39 \cdot 10^{-5} = 11,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} ,$$

$$B \approx 1,1 \mu\text{m} .$$

Jetzt stellt sich die Frage, ob die Pixel-Flächendichte des CCD dem Auflösungsvermögen des (relativ kleinen) Objektivs gerecht wird. Wir gehen näherungsweise davon aus, dass der Abstand zwischen benachbarten Pixeln gleich der Größe der einzelnen Pixel ist. Der Abstand zwischen den Pixeln in Längsrichtung des CCD beträgt

$$\frac{6,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1280} = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5,0 \mu\text{m} .$$

Der Abstand zwischen den Pixeln in Querrichtung des CCD beträgt

$$\frac{4,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1024} = 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4,7 \mu\text{m} .$$

Schließlich bleibt noch zu berücksichtigen, dass das Auflösungsvermögen des Objektivs durch die unvermeidbaren optischen Abbildungsfehler in der Realität schlechter sein muss als der berechnete theoretische Wert:

$$\theta > \theta_{\min} \quad \Rightarrow \quad B > 1,1 \mu\text{m} .$$

Somit können wir feststellen, dass die Pixel-Flächendichte des CCD zumindest größenordnungsmäßig dem Auflösungsvermögen des Objektivs unserer Kompaktkamera gerecht wird. Der Abstand von $5 \mu\text{m}$ zwischen zwei benachbarten Pixeln ist näherungsweise klein genug, um zwei Objekte, die vom Objektiv gerade noch getrennt abgebildet werden, als voneinander getrennte Objekte zu erkennen.

Weiterhin können wir für unser Beispiel feststellen, dass ein Objektiv mit größerem Durchmesser D zwar eine Verbesserung der Lichtstärke, aber keine Verbesserung der Bildauflösung brächte. Um ihr Auflösungsvermögen voll auszunutzen, benötigen Objektive mit großem Durchmesser prinzipiell CCD's mit großer Pixel-Flächendichte.

2 Strahlengang in optischen Instrumenten

Literaturempfehlungen zur (geometrischen) Optik

- Standardwerk: EUGENE HECHT, Optik, Oldenbourg Verlag München Wien, 4. Auflage, 2005.
- Sehr übersichtlich und insbesondere auch mathematisch ausführlich: WOLFGANG DEMTRÖDER, Springer-Lehrbuch, Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 3. Auflage 2004.
- ERNST W. OTTEN, Springer-Lehrbuch, Repetitorium Experimentalphysik für Vordiplom und Zwischenprüfung, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage 2002.

Erläuterungen zu einigen im Folgenden verwendeten Begriffen

- Die **minimale deutliche Sehweite** oder **Bezugssehweite** $s_0 = 25 \text{ cm}$ des Auges ist Konvention. Der **Nahpunkt** des Auges ist die kleinstmögliche Gegenstandsweite, bei der das Auge (ohne Zuhilfenahme optischer Instrumente) durch maximale Akkomodation einen Gegenstand noch scharf abbilden kann. Im Gegensatz zur deutlichen Sehweite differiert der Nahpunkt individuell und insbesondere auch in Abhängigkeit vom Alter. So liegt der Nahpunkt im Alter von 5 Jahren bei ca. 7 cm, im Alter von 45 Jahren bei ca. 25 cm und im Alter von 60 Jahren bei ca. 65 cm.
- Die Winkelvergrößerung oder kurz **Vergrößerung** V optischer Instrumente wird allgemein definiert durch

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel mit bloßem Auge (ohne Instrument)}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

V ist also eine Verhältniszahl bzw. die „Vielfachheit“ von ε gegenüber ε_0 . Wir werden sehen, dass V vom Standpunkt des Beobachters abhängt und somit immer eine Konvention ist.

- Im Gegensatz zu V hängt der laterale Vergrößerungsmaßstab oder kurz der **Abbildungsmaßstab**

$$M = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

nicht vom Standpunkt des Beobachters ab, sondern nur von den Eigenschaften des Instruments, z. B. der Brennweite, und vom Abstand g des Gegenstands zum Instrument.

- Der Zusammenhang zwischen der Brennweite f einer Linse und ihrer Brechkraft D ist

$$D = \frac{1}{f}, \quad [f] = 1 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad [D] = 1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ dpt (Dioptrie)}.$$

- Im Gegensatz zu einem **reellen Bild** lässt sich ein **virtuelles Bild** nicht auf einer Projektionsfläche wie beispielsweise einem weißen Blatt Papier in der Bildebene abbilden.

- Ein **aufrechtes Bild** steht aufrecht und ist seitenrichtig, ein **umgekehrtes Bild** steht auf dem Kopf und ist seitenverkehrt.

In der Theorie der geometrischen Optik sind leider verschiedene Konventionen hinsichtlich der Vorzeichen der dort verwendeten Größen und Parameter üblich, was gelegentlich Verwirrung stiftet, wenn man mit verschiedenen Quellen arbeitet. So werden in der Theorie die Vergrößerungen, bei denen das Bild umgekehrt ist, z. B. beim Mikroskop, manchmal mit einem negativen Vorzeichen versehen. Die folgende Tabelle liefert dazu eine kurze Übersicht.

Größe	Vorzeichen	
	+	-
G	aufrechter Gegenstand	umgekehrter Gegenstand
B	aufrechtes Bild	umgekehrtes Bild
f	Sammellinse	Zerstreuungslinse
g	reeller Gegenstand	virtueller Gegenstand
b	reelles Bild	virtuelles Bild
M	aufrechtes Bild	umgekehrtes Bild

Tabelle 1 nach EUGENE HECHT, Optik, Oldenbourg Verlag München Wien, 4. Auflage, 2005, Seite 275, Tabelle 5.2. Vorzeichenkonvention für einige Größen und Parameter in der geometrischen Optik dünner Linsen.

Achtung !

Wir werden in diesem praxisnahen Skript bei der Berechnung und der Angabe der Vergrößerungen durch optische Instrumente nicht auf diese Vorzeichenkonventionen zurückgreifen und nur die (positiven) Beträge der Größen und Parameter verwenden. Diese Vorgehensweise ist in der alltäglichen Praxis üblich und ausreichend. So sagt beispielsweise niemand: „Das Mikroskop . . . ist bei Verwendung seines Immersionsobjektivs 100:1 (entsprechend 100x) und seines 15x-Okulars in der Lage, ein Objekt *minus* 1500-fach zu vergrößern, und erreicht dabei die Grenze des Auflösungsvermögens der Lichtmikroskopie.“

2.1 Nahlupe

Nahlupe werden benutzt z. B. monokular als Uhrmacherlupe und binokular als Lupenbrillen in der Chirurgie. Das durch eine Nahlupe vom Auge wahrgenommene **Bild** ist **aufrecht** und **virtuell**. Bestimmen wir die **Vergrößerung durch die Nahlupe**: Wie man der Abbildung 4 a entnehmen kann, gilt mit der Lupenbrennweite f_L

$$\tan \varepsilon_0 = \frac{G}{s_0} \Rightarrow \text{für kleine Winkel } \varepsilon_0 \text{ (hauptachsennah)} \quad \varepsilon_0 \approx \frac{G}{s_0},$$

$$\tan \varepsilon = \frac{G}{f_L} \Rightarrow \text{für kleine Winkel } \varepsilon \text{ (hauptachsennah)} \quad \varepsilon \approx \frac{G}{f_L}.$$

$$V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx \frac{\frac{G}{f_L}}{\frac{G}{s_0}} \Rightarrow$$

$$\text{Vergrößerung Nahlupe } V_L := \frac{s_0}{f_L} = \frac{0,25 \text{ m}}{f_L} =: V_{Ok}, \quad [f_L] = 1 \text{ m}. \quad (6)$$

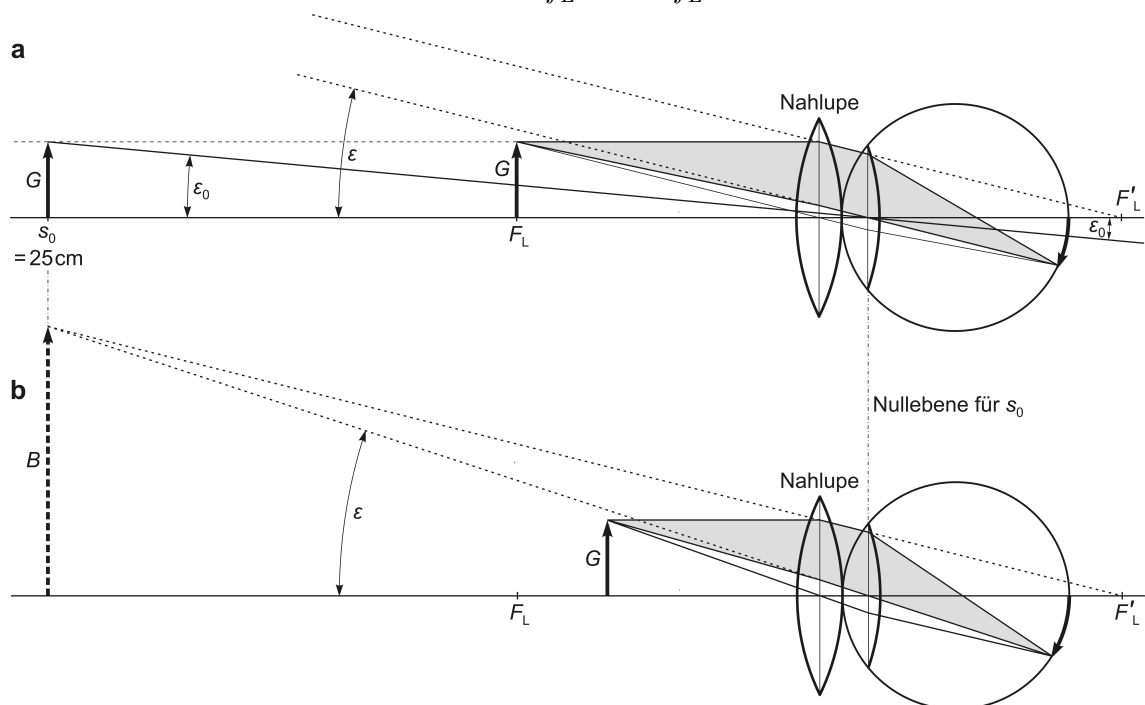


Abb. 4 Nahlupe. In der Darstellung wurde berücksichtigt, dass die Hauptebene der Linse des Auges und Hauptebene der Nahlupe nicht zusammenfallen können, auch wenn in den Herleitungen meistens vereinfachend davon ausgegangen wird.

a Die Nahlupe befindet sich direkt vor dem Auge und der Gegenstand in der vorderen Brennebene der Nahlupe. Deshalb verlaufen die Strahlen hinter der Nahlupe parallel und das Auge kann das aufrechte virtuelle Bild, das sich im Unendlichen befindet gemäß $|b| \rightarrow \infty$, völlig entspannt (akkomodationsfrei) betrachten.

b Der Gegenstand befindet sich innerhalb der Brennweite der Nahlupe. Die Gegenstandsweite wurde so gewählt, dass die Bildweite $|b|$ mit s_0 zusammenfällt. Deshalb divergieren die Strahlen hinter der Lupe und das Auge muss akkomodieren, um ein scharfes Bild zu erhalten. Je näher der Gegenstand an die Nahlupe herangeführt wird, desto größer wird der Sehwinkel ε . Begrenzt wird dieser Vorgang und damit die Vergrößerung schließlich durch die maximal mögliche Akkomodation des Auges bei Erreichen der minimalen deutlichen Sehweite $s_0 \hat{=} |b|$. Bei der „minimalen deutlichen Bildweite“ beträgt die maximale Vergrößerung $V := \frac{s_0}{f} + 1$.

Weil die deutliche Sehweite s_0 Konvention ist, muss auch die Vergrößerung V_L der Nahlupe Konvention sein. Die Okulare von Teleskopen und Mikroskopen sind Nahlupen, mit denen man das vom Objektiv erzeugte umgekehrte reelle Zwischenbild betrachtet. Deshalb haben wir $V_L = V_{Ok}$ geschrieben. Wir werden V_{Ok} bei der Berechnung der Vergrößerung durch Teleskope und Mikroskope verwenden.

Bestimmung der Vergrößerung durch die Lupe allgemein

Nach Eugene Hecht, Optik, Oldenbourg Verlag München Wien, 4. Auflage, 2005, Seite 344 bis Seite 347.

Der Vollständigkeit halber zeigen wir auch noch die verallgemeinerte Fassung zur Bestimmung der Vergrößerung durch die Lupe. Wir wählen dafür den anschaulichen Weg auf Grundlage der Abbildungen 5, ohne formal auf die Gauß'sche Linsengleichung zurückgreifen zu müssen. Leider kommen wir dabei nicht ganz ohne die oben aufgeführten Vorzeichenkonventionen aus.

- Wir müssen berücksichtigen, dass die Werte des Bildweite b eines virtuellen Bildes negativ sind. Um Irrtümer auszuschließen, verwenden wir deshalb in der folgenden Herleitung die (positiven) Beträge $|b|$ der Bildweite.
- Allgemein ist die Vergrößerung durch die Lupe gemäß den Abbildungen 5 a und 5 b und nach dem Strahlensatz

$$V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{\frac{B}{L}}{\frac{G}{s_0}} = \frac{B}{G} \cdot \frac{s_0}{L} .$$

- Der Abbildungsmaßstab $\frac{B}{G} = M$ ergibt sich aus der Abbildung 5 c :

$$\frac{B}{G} = \frac{|b| + f}{f} = \frac{|b|}{f} + 1 .$$

Aus Abbildung 5 b entnehmen wir für den Betrag der Bildweite

$$|b| = L - \ell ,$$

sodass

$$\frac{B}{G} = \frac{L - \ell}{f} + 1 .$$

Der Abbildungsmaßstab ist, wie man sieht, unabhängig von der Position des Auges.

- Damit ist die Vergrößerung durch die Lupe in der verallgemeinerten Form

$$V := \frac{s_0}{L} \cdot \left(\frac{L - \ell}{f} + 1 \right) = \frac{s_0}{f} - \frac{s_0 \cdot \ell}{f \cdot L} + \frac{s_0}{L} \quad \text{für } 0 < g \leq f .$$

Hierbei sind vier spezielle Anordnungen hinsichtlich Gegenstandsweite und Augenposition von besonderem Interesse:

1. $\ell = f$:

$$V := \frac{s_0}{f} - \frac{s_0 \cdot f}{f \cdot L} + \frac{s_0}{L} = \frac{s_0}{f} .$$

2. $g = f$:

In diesem Fall verlaufen die von einer Punktquelle ausgehenden Lichtstrahlen hinter der Lupe parallel, sodass

$$L \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad V := \frac{s_0}{f} .$$

3. $\ell = 0 \Leftrightarrow L = |b| :$

$$V := \frac{s_0}{f} + \frac{s_0}{L} = \frac{s_0}{f} + \frac{s_0}{|b|} .$$

Je kleiner $|b|$ ist, desto größer ist V . Allerdings kann $|b|$ nicht beliebig klein werden, wenn man das Bild noch scharf sehen will. Für das Minimum von $|b|$ gilt auch in diesem Fall die minimale deutliche Sehweite, sodass wir mit $|b|_{\min} = s_0$ die maximale Vergrößerung erhalten:

$$|b|_{\min} = s_0 \Rightarrow V_{\max} := \frac{s_0}{f} + \frac{s_0}{s_0} = \frac{s_0}{f} + 1 .$$

4. $\ell = 0$ und $g = f :$

Dies ist die Situation, die wir bereits mit (6) bei der Vergrößerung der Nahlupe beschrieben haben. Je größer $|b|$ wird, desto kleiner ist V . Für $g = f$ geht $|b|$ gegen unendlich und V ist minimal:

$$|b| \rightarrow \infty \Rightarrow V_{\min} := \frac{s_0}{f} .$$

- Der Fall mit mit sehr großem Augenabstand von der Lupe, d. h. mit

$$\ell \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\ell}{L} \rightarrow 1 \Rightarrow V \rightarrow 0 ,$$

ist praktisch nicht relevant und muss deshalb nicht weiter diskutiert werden.

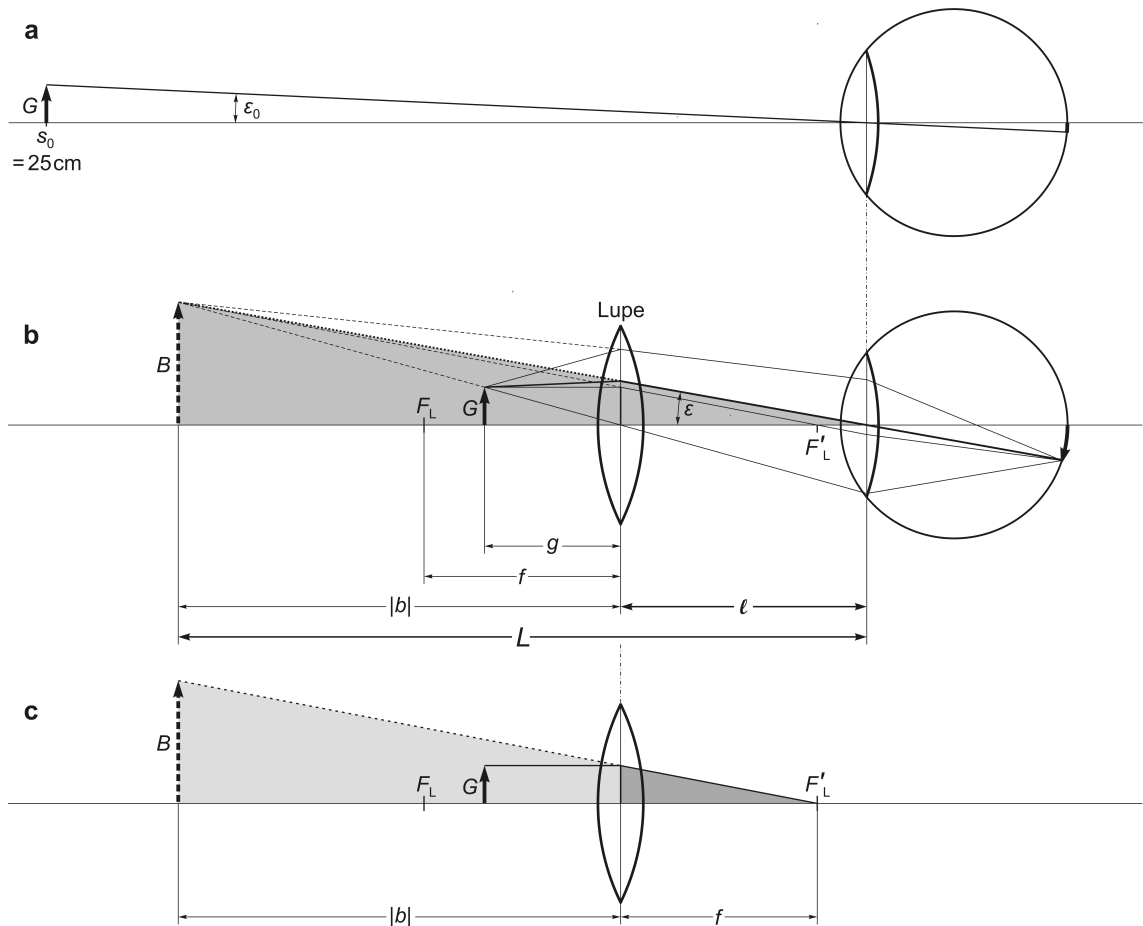


Abb. 5 a Der Gegenstand G befindet sich im Abstand der minimalen deutlichen Sehweite $s_0 = 25 \text{ cm}$ vor dem Auge und erscheint dann mit bloßem Auge unter dem Sehwinkel ε_0 . b Der Gegenstand befindet sich mit der Gegenstandsweite $g < f$ innerhalb der Brennweite vor der Lupe, die deshalb ein vergrößertes aufrechtes virtuelles Bild B erzeugt. Das Auge sieht mit Lupe das Bild B unter dem Sehwinkel $\varepsilon > \varepsilon_0$. L ist der Abstand zwischen der Linse des Auges und dem Bild B und ℓ ist der Abstand zwischen der Linse des Auges und der Lupe. c Zur Bestimmung des Abbildungsmaßstabs M des virtuellen Bildes B mit Hilfe des Strahlensatzes.

2.2 Mikroskop

Es ist Konvention, die durch das Mikroskop (Index M) bewirkte Vergrößerung für den Grenzfall zu berechnen, dass sich das vom Objektiv erzeugte **umgekehrte reelle Zwischenbild** B in der vorderen Brennebene des Okulars befindet (s. Abb. 6 a). Wie bei der Nahlupe beschrieben, kann das Auge dann das Zwischenbild völlig entspannt betrachten, ohne zu akkomodieren.

Wie man der Abbildung 6 entnehmen kann, ist der **Abbildungsmaßstab** M_M für das Zwischenbild nach dem Strahlensatz

$$M_M = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{t}{f_{\text{Ob}}}.$$

Die Vergrößerung V_M durch das Mikroskop setzt sich zusammen aus dem Abbildungsmaßstab (der „Vergrößerung“) des Zwischenbildes, erzeugt durch das Objektiv, und aus der Vergrößerung des Okulars, indem beide miteinander multipliziert werden:

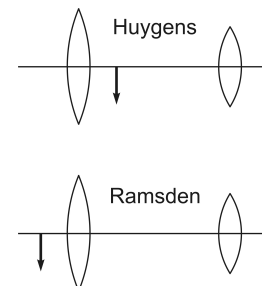
$$V_M = M_M \cdot V_{\text{Ok}} = \frac{t}{f_{\text{Ob}}} \cdot \frac{s_0}{f_{\text{Ok}}} \quad (\text{exakt}).$$

Dabei ist f_{Ob} die Brennweite des Objektivs und f_{Ok} ist die Brennweite des Okulars. Die Tubuslänge t ist durch die Bauweise des Mikroskops, d. h. durch den festen Abstand zwischen Objektiv und Okular vorgegeben. Mit zunehmender **Tubuslänge** muss der Gegenstand näher an die vordere Brennebene des Objektivs herangeführt werden, um ein scharfes Zwischenbild zu erhalten. Dadurch wird das Zwischenbild bzw. der Abbildungsmaßstab des Zwischenbildes größer und die Vergrößerung durch das Mikroskop nimmt zu.

Die Abbildung 6 b zeigt das Wirkungsprinzip eines Okulars mit **Feldlinse** bzw. Kollektivlinse. Vereinfachend haben wir den speziellen Fall gewählt, dass die vordere Brennebene der Augenlinse des Okulars, die Feldlinsenebene und die Zwischenbildebene zusammenfallen. Das Zwischenbild entsteht also genau in der Feldlinsenebene und kann bei völlig entspanntem Auge beobachtet werden, weil es sich gleichzeitig auch in der vorderen Brennebene der Okular-Augenlinse befindet.

Vergleichen wir G und B von Abbildung 6 b mit G und B von Abbildung 6 a, so können wir feststellen, dass durch den Einsatz der Feldlinse ein deutlich größerer Gegenstand auf der Netzhaut abgebildet werden kann. Das Strahlenbündel, das von der Spitze des Gegenstandes in Abbildung 6 b ausgeht, könnte nämlich ohne Feldlinse nicht durch die Augenlinse zur Netzhaut gelangen. **Feldlinsen in Okularen haben also u. a. und insbesondere die Funktion, bei gleicher Vergrößerung das Gesichtsfeld zu erweitern.**

Okulare können recht aufwändige Linsensysteme sein. Bei den einfachen Huygens- und Mittenzwey-Okularen entsteht das Zwischenbild zwischen Feld- und Augenlinse des Okulars, bei den meisten Okulartypen jedoch (z. B. Ramsden, Erfle, Kellner, Plössl, König, orthoskopisches Okular) entsteht das Zwischenbild mehr oder weniger vor der Feldlinse.



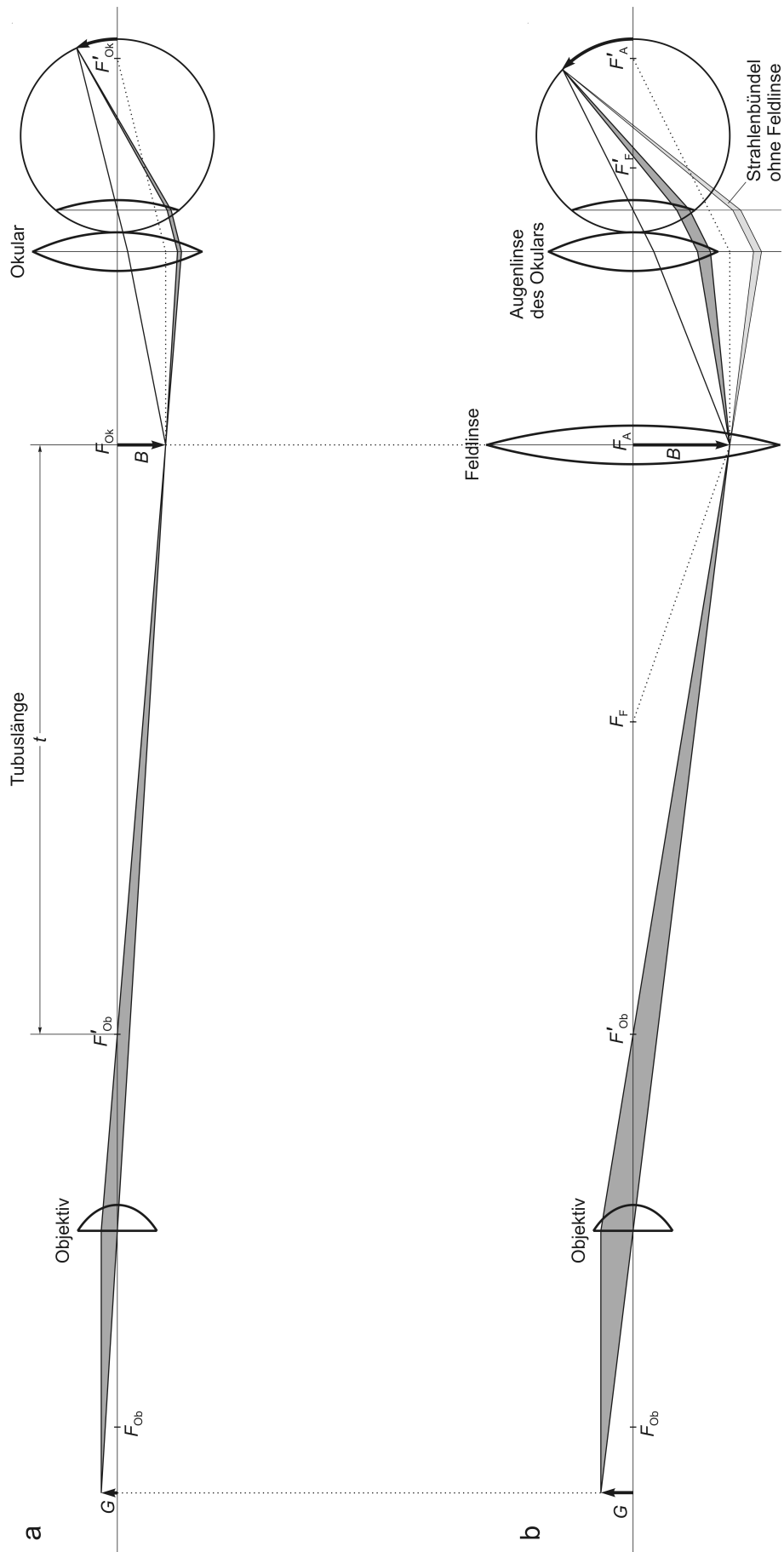


Abb. 6 Mikroskop. **a** Okular ohne Feldlinse. **b** Okular mit Feldlinse.

2.3 Kepler'sches Fernrohr

Die Begriffe Fernrohr und Teleskop (Index T) sind gleichbedeutend. Leider sieht man mit dem Kepler'schen Fernrohr die Objekte umgekehrt. Weil dieser Umstand in der Astronomie nicht stört und weil das Kepler'sche Fernrohr ein großes Gesichtsfeld bei starken Vergrößerungen ermöglicht, wird es vor allem in der Astronomie verwendet und heißt deshalb auch astronomisches Fernrohr. Bei großen Kepler'schen Fernrohren in Sternwarten spricht man auch von Refraktoren³ – im Gegensatz zu Spiegelteleskopen.

Es ist Konvention, die Vergrößerung eines Teleskops für den Fall anzugeben, dass sich der Gegenstand G wie in Abbildung 7 a im Unendlichen befindet, d. h. für die Gegenstandsweite $g \rightarrow \infty$. Das ist deshalb sinnvoll, weil zumindest astronomische Objekte extrem weit entfernt sind und weil die Lichtstrahlen von weit entfernten Punktquellen beim Beobachter nahezu parallel eintreffen.

Ein Beobachter sieht eine weit entfernte punktförmige Lichtquelle mit bloßem Auge unter dem *hauptachsennahen* Schwinkel ε_0 gemäß

$$\tan \varepsilon_0 = \frac{G}{g} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 \approx \frac{G}{g} .$$

Das dann (näherungsweise) in der hinteren Brennebene des Objektivs entstehende Zwischenbild (Index z) mit der „Höhe“ B sieht ein Beobachter im Abstand s_0 mit bloßem Auge unter dem *hauptachsennahen* Schwinkel ε_z gemäß

$$\tan \varepsilon_z = \frac{B}{s_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z \approx \frac{B}{s_0} .$$

Mit $b = f_{\text{Ob}}$ ist der Abbildungsmaßstab M_z des Zwischenbildes B

$$M_z = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f_{\text{Ob}}}{g} .$$

Die Vergrößerung des Zwischenbildes, d. h. die Vergrößerung von G allein durch das Objektiv beträgt folglich

$$V_{\text{Ob}} \approx \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} \approx \frac{\frac{B}{s_0}}{\frac{G}{g}} = \frac{B}{G} \cdot \frac{g}{s_0} = \frac{f_{\text{Ob}}}{g} \cdot \frac{g}{s_0} ,$$

$$V_{\text{Ob}} \approx \frac{f_{\text{Ob}}}{s_0} .$$

Jetzt wird das Zwischenbild aber mit einem Okular (einer Lupe) betrachtet. Das Okular liefert vom Zwischenbild ein um

$$V_{\text{Ok}} := \frac{s_0}{f_{\text{Ok}}}$$

vergrößertes aufrechtes virtuelles Bild. Das Kepler'sche Fernrohr insgesamt liefert somit ein umgekehrtes virtuelles Bild mit der Vergrößerung

$$V_{\text{T}} := V_{\text{Ob}} \cdot V_{\text{Ok}} = \frac{f_{\text{Ob}}}{s_0} \cdot \frac{s_0}{f_{\text{Ok}}} ,$$

$$V_{\text{T}} := \frac{f_{\text{Ob}}}{f_{\text{Ok}}} .$$

³Refraktoren nutzen allein die Lichtbrechung bzw. Refraktion durch Linsen, sind also Linsenfernrohre.

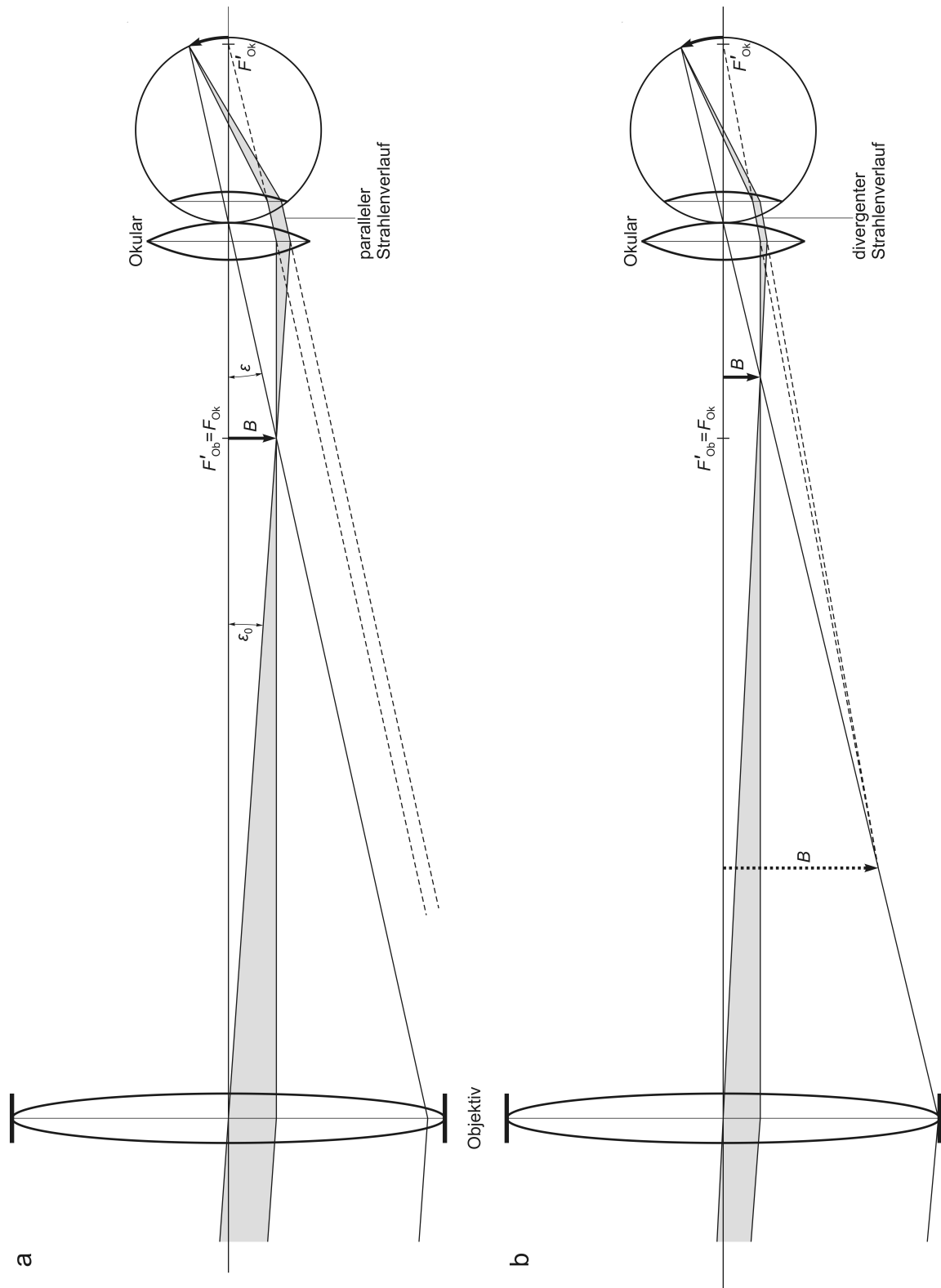


Abb. 7 Kepler'sches Fernrohr. Vereinfachend wurde der Zentralstrahl zwischen der Linse des Auges und dem Okular gemittelt.

a Der beobachtete Gegenstand, in diesem Fall ein aufrecht stehender Pfeil, befindet sich unendlich weit entfernt gemäß $g \rightarrow \infty$. Deshalb fallen die von der Pfeilspitze ausgehenden Lichtstrahlen parallel in das Objektiv ein, sodass das umgekehrte reelle Zwischenbild B in der hinteren Brennebene des Objektivs entsteht.

b Der beobachtete Gegenstand (Pfeil) befindet sich in endlicher Entfernung, sodass das umgekehrte reelle Zwischenbild B jenseits der hinteren Brennebene des Objektivs entsteht.

2.4 Zerstreulinse

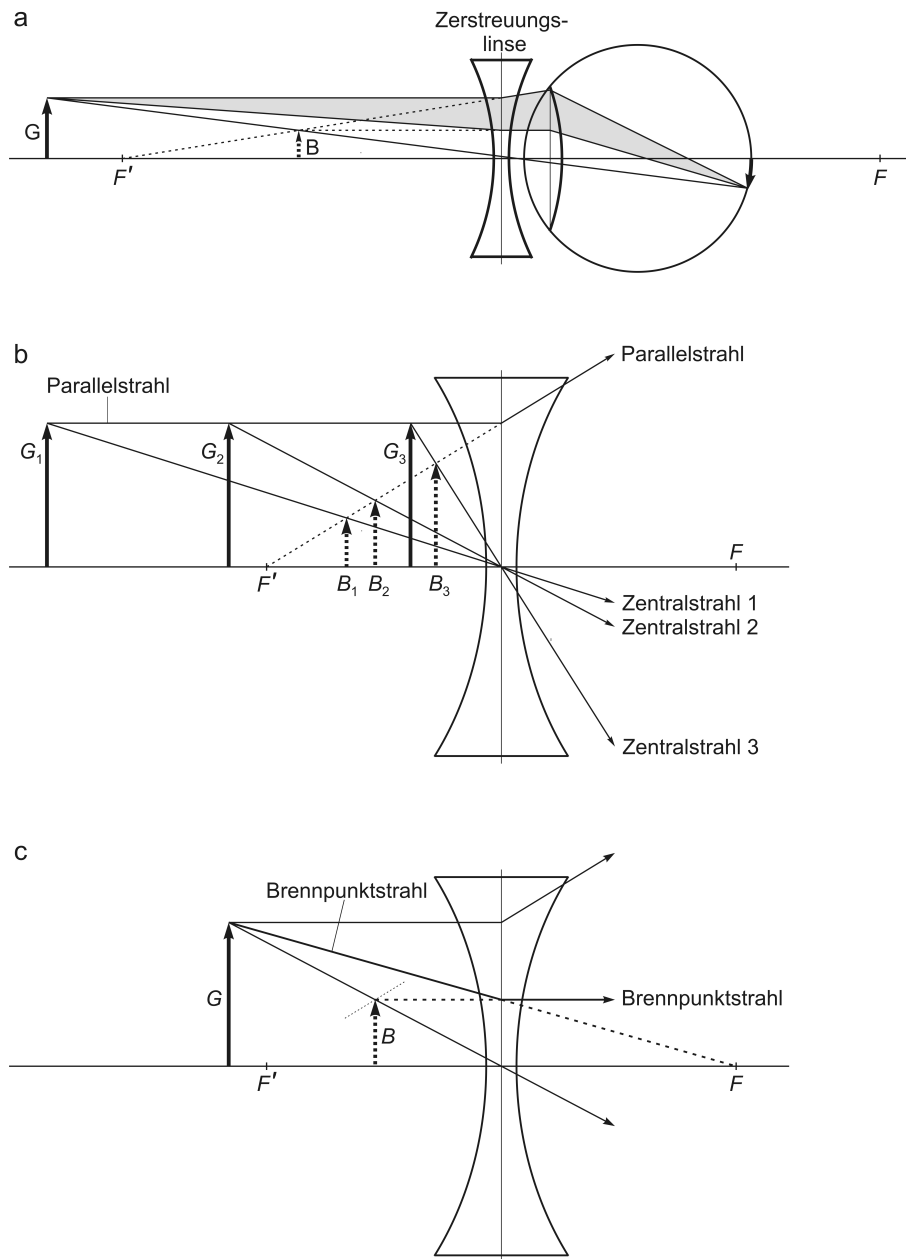


Abb. 8 Zerstreulinse. Man beachte, dass – im Gegensatz zur Sammellinse – bei der Zerstreulinse der vordere Brennpunkt mit F' bezeichnet wird, also gestrichen ist. **a** Das wahrgenommene virtuelle Bild erscheint aufrecht und verkleinert. Vereinfachend wurde für die Zerstreulinse und für Linse des Auges derselbe Zentralstrahl verwendet (Mittelung!). **b** Bildkonstruktion mit Parallelstrahl und Zentralstrahl für verschiedene Gegenstandsweiten. Mit größer werdender Gegenstandsweite erscheint der Gegenstand zunehmend verkleinert. **c** Konstruktion des Brennpunktstrahls.

2.5 Galilei'sches Fernrohr

Das Galilei'sche Fernrohr wurde vor dem Kepler'schen Fernrohr in Holland entwickelt und von Galilei verwendet, weshalb es nicht nur Galilei'sches sondern auch holländisches Fernrohr heißt. Das Galilei'sche Fernrohr ermöglicht im Vergleich zum Kepler'schen Fernrohr leider nur ein sehr kleines Gesichtsfeld. Dafür sieht man die Objekte aufrecht. Demzufolge wird es heute, wenn überhaupt, nur noch für spezielle Zwecke „auf der Erde“ verwendet, z. B. als sog. Opernglas. Und deshalb wird es auch terrestrisches Fernrohr genannt, was natürlich Verwirrung stiftet, denn es gibt auch Fernrohre und Doppelfernrohre, sog. Ferngläser, nach dem Kepler-Prinzip mit Bildumkehrsystemen.

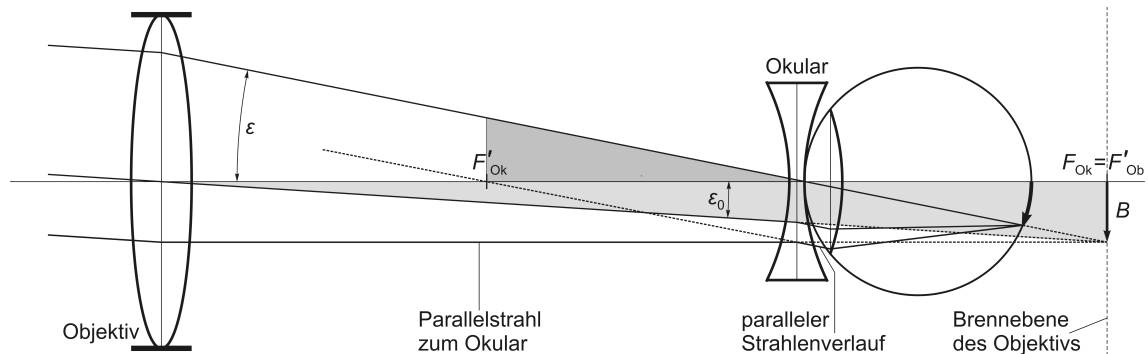


Abb. 9 Galilei'sches Fernrohr. Vereinfachend wurde der Zentralstrahl zwischen der Linse des Auges und dem Okular gemittelt. Der Verlauf der Lichtstrahlen zwischen dem Okular und der Linse des Auges ist parallel.

Konventionsgemäß und wie in der Abbildung 9 dargestellt nehmen wir zur Bestimmung der Vergrößerung des Galilei'schen Fernrohrs wieder an, dass sich der Gegenstand, ein aufrecht stehender Pfeil, in nahezu unendlicher Entfernung befindet. Die von der Pfeilspitze ausgehenden Lichtstrahlen verlaufen deshalb beim Eintreffen am Objektiv annähernd parallel und schließen einen nur sehr kleinen Winkel ε_0 zur Hauptachse ein. Das reelle Zwischenbild B würde theoretisch in der durch F_{Ob} verlaufenden hinteren Brennebene des Objektivs entstehen. Das Okular, eine Zerstreuungslinse, ist aber so *vor* der hinteren Brennebene des Objektivs positioniert, dass F'_{Ok} und F_{Ob} zusammenfallen. Diese Anordnung bewirkt, dass die von einer weit entfernten Punktquelle (Pfeilspitze) ausgehenden Lichtstrahlen hinter dem Okular wieder parallel verlaufen und mit dem Sehwinkel ε in das Auge treten. Das Auge kann jetzt völlig entspannt und ohne zu akkomodieren die Punktquelle (Pfeilspitze) abbilden.

Die Vergrößerung V_T durch das Galilei'sche Fernrohr bzw. Teleskop ergibt sich wie folgt:

$$\tan \varepsilon = \frac{B}{f_{Ok}} \Rightarrow \varepsilon \approx \frac{B}{f_{Ok}},$$

$$\tan \varepsilon_0 = \frac{B}{f_{Ob}} \Rightarrow \varepsilon_0 \approx \frac{B}{f_{Ob}},$$

$$V_T := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx \frac{\frac{B}{f_{Ok}}}{\frac{B}{f_{Ob}}},$$

$$V_T := \frac{f_{Ob}}{f_{Ok}}.$$

Das Galilei'sche Fernrohr liefert also ein vergrößertes aufrechtes virtuelles Bild.